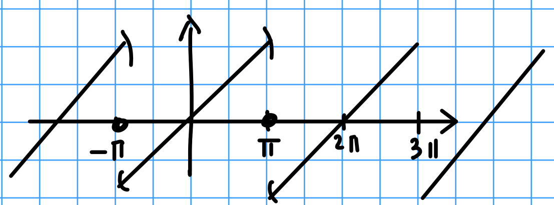
Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 45 18/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPI (di sviluppi in serie di Fourier)



(DENTE DI SEGA)

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } -\pi < t < \pi \\ 0 & \text{se } t = \pi, -\pi \end{cases}$$

f estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π periodica $\left(\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \right)$

$\left(\text{NOTA } f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \text{ e } f \text{ è regolare a tratti} \right)$

Voglio calcolare i coeff di Fourier di f. STAVOLTA CALCOLO i coefficienti reali a_n, b_n. SICCOME f è DISPARI

$$\Longrightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n \qquad b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[t \, \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n}\, dt =$$

$$-\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \cos(n\pi) + \pi \cos(-n\pi)}{n} \right) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$-\frac{2\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2 \pi} \left(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \sin(-n\pi) \right) = -\frac{2}{n} (-1)^n$$

$$a_n = 0 \qquad b_n = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

(Noto $\sum |b_n| = +\infty$ perché $\sum \frac{1}{n} = +\infty$)

DUNQUE $\quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{2(-1)^n}{n}}_{b_n} \sin(nt)$ $\quad$ VALE $\forall t \in \mathbb{R}$ (CONV. PUNTUALE)

Posso mettere $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(t) = \frac{\pi}{2}$. Ne segue

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \otimes$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} n = 2k \rightarrow \sin(k\pi) = 0 \\ n = 2k+1 \rightarrow \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi)\cdot 1 = (-1)^k \end{cases}$$

$$\otimes \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{2(-1)^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{2\,\overset{1}{\overbrace{(-1)^{2k}}}\,(-1)}{2k+1}(-1)^k =$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \iff \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Per curiosità calcolo anche la serie complessa:

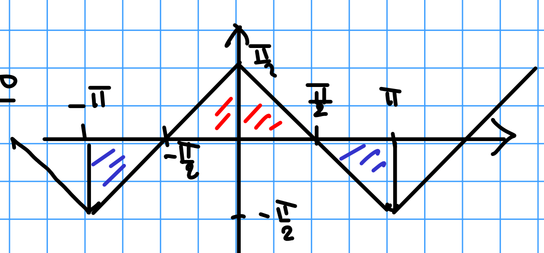
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\,\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{in}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{n}\left(\pi e^{-in\pi} + \pi e^{+in\pi}\right) + 0 =$$

$$\frac{i}{2n}\left(e^{-in\pi} + e^{in\pi}\right) = \frac{(-1)^n i}{n}$$

(torna con il fatto che $b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = -\frac{2(-1)^n}{n}$

ESEMPIO



(ONDA TRIANGOLARE)

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - |t| \qquad -\pi \le t \le \pi$$

ed esteso a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π-periodico

(f è continua, f non è C^1). f è pari. ($\omega = 1$)

$\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$

Se $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ = (per parità)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\underbrace{\frac{\sin(nt)}{n}}_{\text{fa zero in } t=0 \text{ e } t=\pi}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{(1-(-1)^n)}{n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2} & n = 2k+1 \text{ dispari} \end{cases}$$

<u>NOTA</u> $\sum |a_n| < +\infty$ (e f è continua)

Facciamo i $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt =$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-int} + \int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) = \left(\begin{array}{l}\tau = -t \text{ nel primo} \\ \text{integrale}\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(-\tau)e^{in\tau}\,d\tau + \int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) = \quad (f \text{ pari})$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} f(t)e^{int}\,dt + \int_0^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\underbrace{\left(\frac{e^{int}+e^{-in(t)}}{2}\right)}_{\cos(nt)}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt) = \frac{a_n}{2}$$

$$c_n = \frac{(1-(-1)^n)}{\pi\, n^2}$$

Dato che è regolare a tratti ho la convergenza puntuale

$$\Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi\, n^2}\cos(nt) =$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2k+1)^2} \cos((2k+1)t)$. Se metto $t=0$

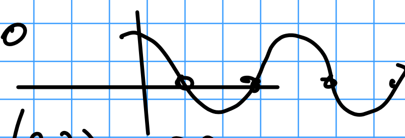
$$\frac{\pi}{2} = f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k+1)^2} \iff \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- Se metto $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}$$ TORNA

(se n è pari $n=2k$ il primo fattore è zero)

(se $n=2k+1$ $\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$



- Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ $f(t) = -\frac{\pi}{2}$ ... (??) PROVARE

Ancora su questa serie possiamo notare che $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ perché $|a_n| \le \frac{c}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

QUESTO IMPLICA che la serie converge totalmente (unif.) su $[-\pi, \pi]$. Infatti

$$\max_{-\pi \le t \le \pi} |a_n \cos(nt)| \le |a_n|$$

Dato che $\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow$ conv. TOTALE $\Rightarrow$ conv. unif.

La f è somma UNIFORME DELLA SUA SERIE DI FOURIER #

GENERALE.

TEOREMA Supponiamo (a_n) (b_n) due succ. in $\mathbb{R}$ e consideriamo le serie $\sum_{1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$, $\sum_{1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

(1) Se $\sum_{1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ la prima serie è TOTALMENTE ($\Rightarrow$ UNIF.) CONV.

$\sum_{1}^{\infty} |b| < +\infty$ " seconda serie " " " "

INFATTI $\quad \| a_n \cos(n\omega t) \|_{\infty,[0,T]} = |a_n|$

$\| b_n \sin(n\omega t) \|_{\infty,[0,T]} = |b_n|$

(b) Se $\sum_1^{+\infty} n|a_n| < +\infty$ / $\sum_1^{\infty} n|b_n| < +\infty \Rightarrow$

$g(t) = \sum_1^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$ è C^1 derivabile e $g'(t) = -\sum a_n n\omega \sin(n\omega t)$

$h(t) = \sum_1^{\infty} a_n \sin(n\omega t)$ è C^1 derivabile e $h'(t) = \sum b_n n\omega \cos(n\omega t)$

Infatti le serie delle derivate di g / h sono

Se $\sum_1^{\infty} |a_n| n < +\infty \Rightarrow \max_{t\in[0,T]} |a_n n\omega \sin(n\omega t)| = n|a_n|\omega$

e dunque $\sum \| -a_n n\omega \sin(n\omega t)\|_\infty < +\infty \Rightarrow$ conv.

Totale (unif.) della serie delle derivate.

$\Rightarrow \quad g$ è C^1 e $g' = \sum -a_n n\omega \sin(n\omega t)$ / h è C^1 e h' ..)

PIÙ IN GENERALE se

$\sum_1^{\infty} |a_n| n^k < +\infty \Rightarrow g$ è C^k e

$g^{(r)}(t) =$ serie delle derivate r-esime $\quad r \le k$

$\sum |b_n| n^q < +\infty \Rightarrow h$ è C^q e $h^{(r)} = \ldots \quad r \le q$ #