Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 44 17/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

SERIE DI FOURIER

Cominciamo con l'introdurre le serie di Fourier in $\mathbb{C}$

Funzioni periodiche. Dato $T>0$ dico che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ è T-periodica se $f(t+T)=f(t)\ \forall t\in\mathbb{R}$

T viene detto "PERIODO" di f.

Esempio $f(t)=\sin(3t)$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ è periodica di periodo 2π $\sin(3(t+2\pi))=\sin(3t+6\pi)=$

$\sin(3t+2\pi+2\pi+2\pi)=\sin(3t+2\pi+2\pi)=\sin(3t+2\pi)=\sin(3t)$

Ma $\sin(3t)$ è anche periodica di periodo $\frac{2\pi}{3}$ infatti

$\sin\left(3\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sin(3t+2\pi)=\sin(3)$

Se f è periodica di periodo $T \Rightarrow$ è periodica di periodo kT $k\in\mathbb{N}$

Sarebbe interessante chiedersi qual è il "minimo periodo", non ci pensiamo

Classe di funzioni periodiche Dato $n\in\mathbb{Z}$ $\ll$ INTERI RELAZIONE considero (Sia $\omega>0$ fissato)

$e_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\quad:\quad e_n(t)=e^{in\omega t}$

$$e_n(t) = \cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)$$

Queste e_n sono periodiche di periodo $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

(e_n è periodica di periodo $\frac{2\pi}{n\omega}$ $\Rightarrow$ di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$)

Nota: ω si chiama frequenza angolare $\omega T = 2\pi$

(e_n ha freq. angolare $\omega_n = n\omega$)

VORREI CHE UNA generica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T periodica

fosse esprimibile come una serie: $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ con $c_n \in \mathbb{C}$

IN QUALCHE SENSO (PUNTUALE/UNIF. / ??)

c_n da trovare.

FATTO Se $n, m \in \mathbb{Z}$ allora si ha

$$\int_0^T e_n(t) \overline{e_m(t)} \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ T & \text{se } n = m \end{cases}$$

DIM. $\int_0^T e^{in\omega t} e^{-im\omega t} dt = \int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt$

SE $n = m$ $\longrightarrow$ $\int_0^T e^0 \, dt = T$

Se $n \neq m$ $\longrightarrow$ $\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \left[\frac{e^{i(n-m)\omega t}}{i(n-m)\omega} \right]_0^T =$

$\frac{1}{i(n-m)\omega} \left(e^{i\underbrace{(n-m)}_{k}\omega T} - e^{i(n-m)\cdot 0} \right) =$

$\frac{1}{i(n-m)\omega} \left(\underbrace{e^{ik2\pi}}_{=1} - 1 \right) = 0$

$\left(e^{i2\pi k} = \underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1} + i \underbrace{\sin(2\pi k)}_{=0} \right)$ #

POSSIAMO CERCARE DI CAPIRE CHI SONO I c_n

Vorrei: $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$. Prendo $m \in \mathbb{Z}$ e moltiplico per $\overline{e_m}$

$$\Rightarrow \quad f \overline{e_m} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \right) \cdot \overline{e_m} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \overline{e_m}$$

INTEGRO TRA 0 e T $\Rightarrow$

$$\int_0^T f(t)\,\overline{e_m}(t)\,dt = \int_0^T \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(t)\overline{e_m}(t)\Big)\,dt \overset{??}{=}$$

?? suppongo di poter integrare per serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \underbrace{\int_0^T e_n(t)\,\overline{e_m}(t)\,dt}_{\text{TUTTI NULLI TRANNE CHE PER } n=m} = c_m T$$

" Se tutto va bene " $\qquad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\overline{e_n}(t)\,dt$

<u>Def.</u> Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ tale che f sia T periodica, f misurabile su $\mathbb{R}$ e $\int_0^T |f(t)|\,dt < +\infty$

Definisco i " coefficienti di Fourier complessi ", i numeri:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

si vede che $f e^{-in\omega t}$ è integrabile su $[0,T]$

$|f(t)\,e^{-in\omega t}| = |f(t)| \leftarrow$ INTEGRABILE

<u>DOMANDA</u> Data f con le proprietà sopra posso dire che

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(t) \qquad (\text{punt / unif / ??})$$

dove c_n sono i coeff di F. NO

NEANCHE SE IMPONGO f CONTINUA posso dire che la formula sopra vale $\forall t \in \mathbb{R}$

<u>Nomenclatura</u> La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$, dove $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$

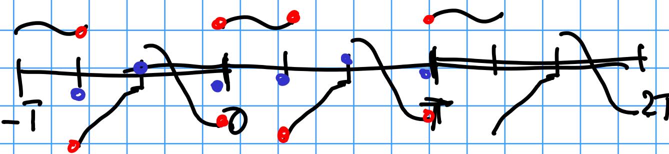
si chiama " SERIE DI FOURIER " di f.

<u>TEOREMA 1</u> SUPPONIAMO CHE SIA " REGOLARE A TRATTI " : E T-PERIODICA

esistono $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K = T$ tali che

- f è derivabile in ogni $]t_i, t_{i+1}[$ $i = 0 \dots K$
- $|f'(t)|$ limitata su ogni $]t_i, t_{i+1}[$

(NON CHIEDO f continua su $[0,T]$)



PERÒ si vede che sotto queste ipotesi

$\forall t_i$ esistono $\lim_{x \to t_i^-} f(t) = f(t_i^-)$, $\lim_{x \to t_i^+} f(t) = f(t_i^+)$

(e in tutti i $t_i + KT$)

ALLORA La serie di Fourier di f CONVERGE puntualmente su $\mathbb{R}$ alla funzione

$$\tilde{f}(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

NATURALMENTE se $t \neq t_i + KT \Rightarrow f(t^+) = f(t^-)$

la serie in t converge a $f(t)$.

NON DIMOSTRO

OSS. Non mi posso aspettare la conv. uniforme — almeno se f è discontinua (se ci fosse conv. unif $\Rightarrow$

$f = \sum c_n e_n$ sarebbe continua, essendo e_n funzioni continue)

IN REALTÀ ANCHE se f È CONTINUA posso NON AVERE la convergenza puntuale in ogni t (tanto meno la conv. unif)

TEOREMA Se f è C^1 $\Rightarrow$ $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ UNIFORMEMENTE su $[0,T]$ (su $\mathbb{R}$)

?

Dim (PARZIALE : caso f di classe C^2)

? $\rightarrow$ se chiamo $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$ allora $S_n \rightarrow f$ UNIF. su $[0,T]$ (su $\mathbb{R}$)

Noto che $c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$ = (per parti)

$$\frac{1}{T}\left[f(t)\, \frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega} \right]_0^T + \frac{1}{inT\omega}\int_0^T f'(t)\, e^{-in\omega t}\, dt =$$

$$\frac{f(T)\,e^{-in\omega T} - f(0)\,e^{-in0}}{-in\omega} + \frac{1}{inT\omega}\underbrace{\left[f'(t)\,\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^T}_{= 0} + \frac{1}{(in\omega)^2 T}\int_0^T f''(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

$$\frac{f(0)\,(\overbrace{e^{-in2\pi}}^{=} - 1)}{-in\omega} = 0 \;!!$$

$$\Rightarrow \quad c_m = -\frac{1}{T}\,\frac{1}{\omega^2 m^2}\int_0^T f''(t)\, e^{-in\omega T}\, dt$$

$$|c_m| \leq \frac{1}{T\omega^2 m^2}\int_0^T |f''\, e_m|\, dt = \frac{1}{T\omega^2 m^2}\int_0^T |f''(t)|\, dt$$

$$\leq \frac{\text{costante}}{m^2}$$

DUNQUE $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m| < +\infty$ $\left(\text{perché } \sum \frac{1}{n^2} < +\infty\right)$

Questo mi dà la <u>convergenza TOTALE</u> di $\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_n e_m$ su $[0,T]$

cioè la convergenza di $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \underbrace{\max_{0\leq t\leq T} |c_n e_n(t)|}_{\|c_n e_n\|_{\infty,[0,T]}} = \sum |c_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. #

IDEA LA CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER per f è LEGATA ALLA REGOLARITÀ DI f

(ci torniamo sopra)

$\rightarrow$ CASO REALE (ci riconduciamo dal caso complesso)

<u>CONSIDERO</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodico

Posso calcolare i coeff c_n detti sopra. Il fatto che f sia reale $\Rightarrow$ $(f = \overline{f}$ se f è reale$)$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{e_{-n}}(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)\,e_{-n}}\,dt =$$

$$\frac{1}{T}\overline{\int_0^T f(t)\,e_{-n}} = \frac{1}{T}\overline{\int_0^T f(t)\,\overline{e_n}(t)\,dt} = \overline{c_n}$$

Riassumendo f reale $\Rightarrow$ $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Allora "formalmente"

$$f \overset{??}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e_n + c_0 e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e_{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \quad (\text{uso } c_{-n} = \overline{c_n})$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{c_n e_n} + c_n e_n\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\,(c_n e_n)$$

è tutto in $\mathbb{R}$ $\qquad c_0 = \int_0^T f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

Supponiamo $c_n = a_n - i b_n$ con $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ $\quad n \geq 1$

$c_0 \in \mathbb{R}$ $\quad (c_0 = a_0 \quad b_0 = 0)$

$$e_n(t) = \cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)$$

$$c_n e_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) + i\left(a_n \sin(n\omega t) - b_n \cos(n\omega t)\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,(c_n e_n(t)) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$\Rightarrow f(t) \overset{??}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

dove $\quad 2a_n = 2\,\mathrm{Re}\,c_n = 2\frac{1}{T}\mathrm{Re}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t} = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$

$\quad 2b_n = -2\,\mathrm{Im}\,c_n = \dots \quad \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt$

INGLOBO IL 2 in a_n, se $n \geq 1$, TROVO

$$f(t) \overset{??}{=} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (\leftarrow)$$

dove
$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad (\text{LA MEDIA DI } f \text{ su } [0,T]) \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt \end{aligned}}$$

a_0, a_n, b_n si chiamano coeff di Fourier reali
e la serie scritta sopra ($\leftarrow$) si chiama serie di F. reale.
VALGONO I TEOREMI ANALOGHI

<u>Teorema</u>. Se f è regolare e tratti, f è reale. $\Rightarrow$

- La serie di Fourier reale ($\leftarrow$) converge puntualmente a $\dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (e $f(t)$ se t non è uno dei t_i ...)
- Se f è C^1 la convergenza è uniforme.

<u>COMMENTO</u> La serie reale ci permette di esprimere una funzione periodica come "somma di armoniche" (con frequenze ang. multiple della frequenza ang. fondamentale $\frac{2\pi}{T}$

- <u>DUNQUE</u>, se parto dai coeff c_n complessi $\Rightarrow$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n \qquad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n \qquad n \geq 1$$
$$a_0 = c_0$$

Può essere interessante capire cosa rappresentano $|c_n|$ e $\mathrm{Arg}(c_n)$

CIOÈ suppongo che $c_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ $\quad 0 \leq \theta_n < 2\pi$, $\rho_n \geq 0$

Allora $f(t) \overset{??}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n e^{i\theta_n} e^{in\omega t} =$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho_n e^{i(n\omega t+\theta_n)} = \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left(e^{in\omega t+i\theta_n} + e^{-in\omega t-i\theta_n}\right) =$$

(dato che f è reale $c_{-n} = \overline{c_n}$ $\quad \theta_{-n} = -\theta_n$, $\rho_{-n} = \rho_n$)

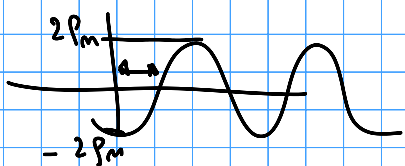
$$= \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\rho_n \operatorname{Re} e^{i(n\omega t+\theta_n)} = \rho_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(n\omega t+\theta_n)$$

$$\cos\left(n\omega\left(t+\frac{\theta_n}{n\omega}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ ρ_0 = media

$2\rho_n$ è l'ampiezza dell'armonica n-esima

θ_n è lo "sfasamento" dell'armonica n-esima.



Fatti: Si ha

① Se f è pari $\Rightarrow$ ($\Leftarrow$?!) $c_n = c_{-n}$ $\Longleftrightarrow$ (se f è reale) $b_n = 0$ $\forall n$

② se f è dispari $\Rightarrow$ ($\Leftarrow$?!) $c_{-n} = -c_n$ $\Longleftrightarrow$ (se f è reale) $a_n = 0$ $\forall n$

Dim ① $c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\omega t}\, dt$ $\qquad \tau = -t \qquad d\tau = -dt$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{-T} f(-\tau)\, e^{-in\omega\tau}(-d\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(\tau)\, e^{-in\omega\tau}\, d\tau = c_n$$

(perché l'integranda è periodica)

Se aggiungo l'ipotesi f reale $\Rightarrow$ $c_{-n} = \overline{c_n}$ $\Rightarrow$
$c_n = \overline{c_n}$ $\Rightarrow$ $c_n \in \mathbb{R}$ (c_n reali pari) $\Rightarrow$ $b_n = 0$

② $c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\omega t}\, dt$ $\qquad \tau = -t \qquad d\tau = -dt$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{-T} f(-\tau)\, e^{-in\omega\tau}(-d\tau) = -\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(\tau)\, e^{-in\omega\tau}\, d\tau$$

$=$ (dato che l'integranda è T-periodica) $= -\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\, e^{-in\omega\tau}\, d\tau = -c_n$

$\Rightarrow$ se f è dispari $c_{-n} = -c_n$

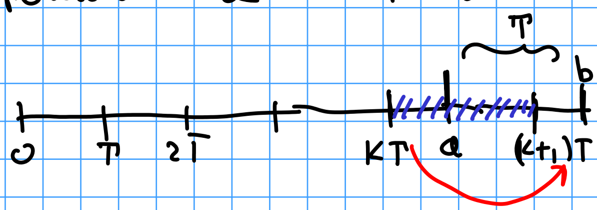
Se aggiungo f è reale $\Rightarrow$ $c_{-n} = \overline{c_n}$ $\Rightarrow$ $c_n = -\overline{c_n}$

Dunque f reale dispari $\Rightarrow$ c_n IMMAGINARI PURI DISPARI $\Rightarrow$ $a_n = 0$

OSS. In ogni caso i coeff. di Fourier si possono calcolare integrando su un qualunque intervallo $[a,b]$ con $b-a=T$

Per esempio $\quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt = (*)$

supponiamo $\quad a = KT+\alpha \quad 0\le \alpha < T \quad \Rightarrow b = a+T = (K+1)T+\alpha$



Uso la sostituzione $\quad \tau = KT + t, \quad d\tau = dt \quad \tau \in [KT,(K+1)T]$

$$T(*) = \int_{KT}^{(K+1)T} f(\tau-KT)\,e^{-in\omega(\tau-KT)}\,d\tau = \int_{KT}^{(K+1)T} f(\tau)\,e^{-in\omega\tau}\,d\tau =$$

$$\int_{KT}^{a} f(\tau)\,e^{-in\omega\tau}\,d\tau + \int_{a}^{(K+1)T} f(\tau)\,e^{-in\omega\tau}\,d\tau = (**)$$

Cambio di variabile nel primo addendo $\quad s = \tau+T \quad ds = d\tau$

$KT\le\tau\le KT+\alpha = a \Rightarrow (K+1)T \le s \le (K+1)T+\alpha = b$

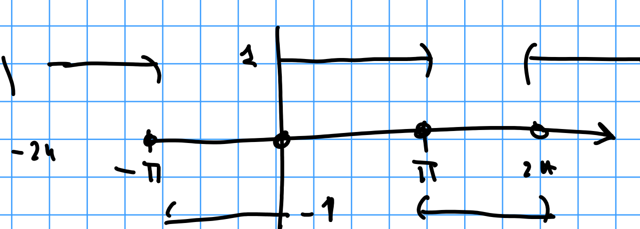
$$(**) = \int_{(K+1)T}^{b} f(s-T)\,e^{-in\omega(s-T)}\,ds + \int_{a}^{(K+1)T} f(\tau)\,e^{-in\omega\tau}\,d\tau =$$

$$\int_{(K+1)T}^{b} f(s)\,e^{-in\omega s} + \int_{a}^{(K+1)T} f(s)\,e^{-in\omega s}\,ds =$$

$$\int_a^b f(s)\,e^{-in\omega s}\,ds \qquad \#$$

Per esempio $\quad c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt \qquad \#$

ESEMPIO (onda quadra)



$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t\in\,]0,\pi[\\ 0 & t = 0,\pi,-\pi \\ -1 & \text{se } t \in\,]-\pi,0[\end{cases}$$

e poi f deve essere 2π periodica

Calcoliamo la serie di Fourier per f. $(\omega = 1,\ T = 2\pi)$

<u>Versione Complessa</u>

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\, e^{-int}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1)\, e^{-int}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(-\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{-in}\left(-\left(1 - e^{in\pi}\right) + \left(e^{-in\pi} - 1\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{i}{n}\left(2e^{in\pi} - 2\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{i}{n}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \boxed{\frac{i}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{-2i}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

(c_n sono immaginari puri dispari)

Se ricordo le formule (f è reale) $a_n = 2\,\mathrm{Re}\, c_n = 0$ $b_n = -2\,\mathrm{Im}\, c_n =$

$$\frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}$$

Si potevo trovare gli a_n e i b_n usando le formule reali.

$a_n = 0$ perché f è dispari.

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{T} f(t)\sin(nt)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{T}\sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos(n\pi)\right) = \boxed{\frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

TORNA $\overset{\shortparallel}{b_n}$

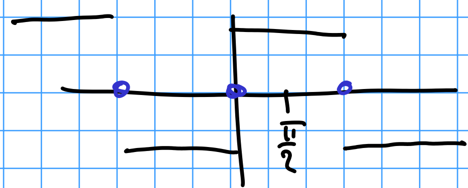
OSS. $|c_n| \simeq \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ $\left(\sum |c_n| = +\infty \right)$

Vedremo che questo ha a che fare con il fatto che f è discontinua.

USANDO I TEOREMI VISTI: f è regolare a tratti $\Rightarrow$

le serie di Fourier convergono puntualmente a f

(perché ho definito f in modo che $f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$)



(nei punti di salto la serie converge a zero)

In particolare

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$=$ (tolgo gli n pari in cui $b_n = 0 \Rightarrow$ $n = 2k+1$ $k = 0 \dots$)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(k\pi)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = (-1)^k$$

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 \iff$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$