Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 43 16/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00 VIA TELEMATICA (Teams)
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Chi volesse usufruire del ricevimento mandi una mail

Abbiamo visto che non tutte le funzioni C^∞ sono somme di una serie di potenze ($e^{-1/x^2} = f(x)$ è un controesempio)

PERÒ

Teorema Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ e $f :]x_0 - r, x_0 + r[\to \mathbb{R}$, sia di classe C^∞ in $]x_0 - r, x_0 + r[$. Supponiamo inoltre che $\exists\ K, M$ tali che $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ si abbia

$$(*) \qquad |f^{(n)}(x)| \le K M^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$$

(dunque la serie di potenze ↑ ha raggio di conv. $R \ge r$)

DIM. Uso la formula di Taylor con resto di Lagrange. Dunque $\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\ \xi_x$ compreso tra x e x_0 t.c.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_{n,x_0}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_{n,x_0}(x)}$$

$$\Rightarrow \quad |f(x) - P_{n,x_0}(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{K M^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

Se faccio tendere $n \to \infty$, l'espressione a dx tende a zero

$$\frac{M_1^n}{n!} \to 0 \qquad (M_1 = M|x-x_0|) \qquad \text{VINCE IL FATTORIALE}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P_{n,x_0}(x) = f(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

(la serie di Taylor converge a $f(x)$)

$P_{n,x_0}(x)$ è la somma parziale n-esima della serie di Taylor

$\#$

<u>ESEMPIO</u> $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow$

se mi restringo a $]-r, r[$ ($r>0$ finito) ho

$$|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq e^r \quad \text{se } x \in]-r, r[$$

(ho $K = e^r$, $M = 1$)

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} \qquad \left(\begin{array}{c}\forall x \in]-r, r[\\ \text{visto che } r \text{ è arbitrario}\end{array}\right) \to \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>OSS.</u> Potremmo per analogia definire

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{quando } z \in \mathbb{C} \qquad \left(a_n = \frac{1}{n!}\right)$$

QUESTO HA SENSO perché il raggio di convergenza della serie scritta sopra è too: $\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \longrightarrow 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

DUNQUE $R = \frac{1}{0} = +\infty$ La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ha raggio ∞.

$\boxed{\text{NOTA}}$ Se $z = x \in \mathbb{R}$ ritrovo e^x.

PIÙ in generale se chiamo (provvisoriamente) $\boxed{g(z) = \sum \frac{z^n}{n!}}$

$(g : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$, DICO CHE $\boxed{g(z+w) = g(z)g(w)}$

se dimostro questa proprietà è naturale che g sia un esponenziale.

Dimostro la proprietà sopra usando il prodotto alla Cauchy di due serie:

Se (a_n) e (b_n) sono due succ. DEFINISCO

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Dico che $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ è il prodotto alla Cauchy delle due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

PROP. Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono assolutamente convergenti $\Rightarrow$ $\sum c_n$ è ass. conv. e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \quad \text{(NO DIM)}$$

Dimostro la proposizione

$z, w \in \mathbb{C}$

$$g(z)g(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = g(z+w)$$ BIN. DI NEWTON

#

Altre proprietà: $\frac{d}{dx} g(x) = g(x)$

DIM. Dato che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ è ass. conv. su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

la serie converge su $\mathbb{R}$ e conv. unif. su $\overline{B(0,R)}$ $\forall R > 0$

Inoltre posso derivare per serie su $]-R, R[$ $(z = x \in \mathbb{R})$

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = g(x)$$

HA SENSO DEFINIRE $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

OSSERVO CHE $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}$

$$= e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

$$= e^x \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{2k!}}_{\cos(y)} + i \underbrace{\sum (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(y)} \right) = e^x(\cos(y) + i \sin(y))$$

(lo vedo mostrando che

$$\left| \frac{d}{dy^k} \cos(y) \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{d}{dy} \sin(y) \right| \leq 1$$

uso il teorema di prima

VECCHIA FORMULA

$\rightsquigarrow$ $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i \sin y)$

SOLUZIONE "PER SERIE" DI UN'EQ. DIFF. LINEARE

Esempio (semplice - non sarebbe necessario usare questa tecnica)

Considero

(E) $\quad y' = y$ (la sappiamo risolvere ma vediamo un metodo alternativo)

IDEA: cerco y della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

In sostanza cerco una successione (a_n) in modo che y definita sopra:

(1) abbia raggio di conv. positivo, $R>0$

(2) In $]-R,R[$ la y verifichi (E).

Ragiono così: prendo y definita sopra e la derivo: se ammetto che converga su $]-R,R[$ $\Rightarrow$ $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

Impongo che valga (E) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (!!)

Nella serie a sinistra voglio più che il termine generale contenga x^n e non x^{n-1} $\Rightarrow$ cambio di indice $m = n-1$ $\Leftrightarrow$ $n = m+1$ e riscrivo la serie a sx come

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \Longrightarrow$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) a_{n+1} - a_n\right) x^n$$

$\Longleftrightarrow \quad (n+1) a_{n+1} - a_n = 0 \quad \forall n$ $\qquad$ Relazione ricorsiva sugli a_n

$$\boxed{(R) \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}}$$

(Perché $n+1 \neq 0 \ \forall n$)

Abbiamo un modo di generare tutti gli a_n !! ALMENO SE FISSO (ad arbitrio) $a_0 \in \mathbb{R}$, dopo di che la (R) individua UNIVOCAMENTE $a_n \ \forall n \geq 1$

Questo torna con il fatto che posso scegliere come mi pare $a_0 = y(0)$ e poi $y(x)$ è univocamente determinato

(EQ. DIFF. DI ORDINE 1 – IN FORMA NORMALE: il coeff di y' non è nullo in nessun x; qui è $1 \neq 0$).

Ho TROVATO I COEFF. (a_n). ~~SE~~ $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ esiste $\Rightarrow$ gli a_n verificano (R). Per far vedere che $y(x)$ esiste (da qualche parte) cerco di trovare il raggio di conv. . Ricordo che

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{con} \quad L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

se $a_n \neq 0$

Se $a_0 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \Rightarrow y(x) = \qquad R = +\infty$

Se $a_0 \neq 0 \Rightarrow a_n \neq 0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{\text{per } R}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{n+1}}{a_n} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R = +\infty}$ $\quad$ $y(x)$ esiste $\forall x \in \mathbb{R}$

Ho trovato in definitiva che le soluzioni di

$$y' = y$$

sono esprimibili con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dove $\overset{y(0)}{\overset{\parallel}{a_0}} \in \mathbb{R}$ arbitrario

e $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \quad \forall n \geq 0$ (ricavo gli a_n con $n \geq 1$)

$\left(a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \quad \forall n \geq 1 \right)$ e dove $y(x)$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

IN REALTÀ – IN QUESTO CASO SPECIALE – IO CONOSCO ESPLICITAMENTE $y(x)$. Dalla formula risolutiva $\Rightarrow$ $\boxed{y(x) = c\, e^x}$

IN EFFETTI QUESTA FORMA LA POSSO RITROVARE A PARTIRE DA (R)

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$ Mettiamo che $a_0 = 1$

$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{a_0}{1} = 1$, $a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{6}$

$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{1}{24}$ . . . . .

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n!}}$$

Per induzione basta mostrare che se $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

e questo segue da R:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n = \frac{1}{n+1}\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$$ TORNA =)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

QUI DUNQUE NON È PARTICOLMENTE UTILE QUESTA TECNICA

DIVERSO IL CASO DI UN'EQUAZIONE LINEARE CON COEFF. DIPENDENTI DA X, e ordine > 1, Per es.

II° ordine $$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0 \quad \left(= w(x) \right)$$

LINEARE. OMOGENEA (se qui c'è zero)

È in FORMA NORMALE se $a(x) = 1$ — si può sempre mettere in forma normale se $a(x) \neq 0$. Il tutto va considerato su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ in cui sono definiti $a(x), b(x), c(x)$

<u>TEOREMA DI CAUCHY</u> Se $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continue e se <u>$a(x) \neq 0$</u> $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists$ unico $y(x)$ se fisso $y(x_0) = \alpha$ $y'(x_0) = \beta$

$x_0 \in I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

① IN GENERALE NON ABBIAMO UNA FORMULA RISOLUTIVA

② Se $a(x) = 0$ per qualche x il Teorema non vale

PUÒ ALLORA ESSERE UTILE QUESTA TECNICA "per serie"

Consideriamo

$$(E) \quad x y'' - y' - y = 0$$

(di secondo ordine, lineare, omogenea, NON È IN FORMA NORMALE e non è possibile metterla in forma normale su $\mathbb{R}$, perché dovrei scrivere $y'' - \frac{y'}{x} - \frac{y}{x} = 0$ ← SOLO SE $x \neq 0$.

POSSO USARE CAUCHY su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ cioè su $]0, +\infty[$ o su $]-\infty, 0[$

~ se $x_0 > 0 \Rightarrow \exists !$ la soluzione $y(x)$ $x > 0$ tale che $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$ (α, β assegnati in $\mathbb{R}$)

POSSO PERÒ DOMANDARMI SE $\exists$ $y(x)$ sol. di (E) su $\mathbb{R}$

USIAMO IL METODO DETTO PRIMA. Cerco

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

AMMETTIAMO PER UN MOMENTO CHE $y(x)$ ESISTA ⇒

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \leftarrow$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x y''(x) = x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \left(\begin{array}{l}\text{scalo gli}\\ \text{indici di 1}\end{array}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n$$

↖ se $n=0$ l'addendo è $\underline{0} \cdot 1 \cdot a_1 \cdot x^0 = 0$
POSSO DUNQUE AGGIUNGERE L'INDICE $n=0$

IMPONGO CHE VALGA L'EQUAZIONE ⇒

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n(n+1) a_{n+1} - (n+1) a_{n+1} - a_n \Big) x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{a_{n+1} (n+1)(n-1) - a_n}_{\text{devono essere tutti nulli}} \Big) x^n = 0 \iff$$

$xy'' - y' - y$ ↗

$(R) \quad (n+1)(n-1)\, a_{n+1} = a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Sarei tentato di scrivere $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(n+1)(n-1)}$

NON POSSO DIVIDERE PER ZERO QUANDO $n = 1$

Devo vedere cosa mi dice R nel caso $n=1$

$\boxed{n=1} \qquad 0 \cdot a_2 = a_1 \qquad \Rightarrow \boxed{a_1 = 0} \qquad (\rightsquigarrow y'(0) = 0)$

Se allora metto $\boxed{n = 0}$, da (R) ricavo:

$1 \cdot (-1)\, \underset{0}{a_1} = a_0 \qquad \Rightarrow \boxed{a_0 = 0} \qquad (\longrightarrow y(0) = 0)$

A questo punto posso riscrivere (R) come segue:

$(R) \qquad a_0 = a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2-1} \qquad \forall n \geq 2$

Questa (R) individua tutti gli a_n se fisso ad arbitrio $\underline{a_2}$ (la (R) non impone nulla su a_2)

$a_0 = a_1 = 0$, $\quad a_2$ è LIBERO, $\quad a_n$ sono univocamente determinati se $n \geq 3$

- TUTTO QUESTO MI PERMETTE DI CONOSCERE $y(x)$ mediante una serie di potenze – A PATTO DI DIMOSTRARE che il raggio di conv. è > 0. IN EFFETTI

Se $a_2 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \Rightarrow R = +\infty$

Se $a_2 \neq 0$ Trovo $R = \dfrac{1}{L}$ e $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$ (da R)

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{a_n}{n^2-1}}{a_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$

Supponiamo $a_2 = 1 \Rightarrow$

$n=2$: $a_3 = \frac{1}{4-1} a_2 = \frac{1}{3}$

$$y(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{360} + \dots$$

$n=3$: $a_4 = \frac{1}{9-1} a_3 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$

$n=4$: $a_5 = \frac{1}{16-1} a_4 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{360}$

$n=5$: $a_6 = \frac{1}{25-1} a_5 = \frac{1}{3}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{15}\,\frac{1}{24}\ \dots$

ESEMPIO (caso non omogeneo)

$$(E.1) \qquad x y'' - y' - y = x$$

Come prima cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e con gli stessi calcoli ho

$$x y'' - y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} (n-1)(n+1) - a_n \right) x^n = x$$

Questa serie deve fare x. $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1} (n-1)(n+1) - a_n \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

dove $b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$ DUNQUE TROVO

$$(R.1) \qquad a_{n+1}(n+1)(n-1) - a_n = b_n \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

se $n=1$ TROVO $a_2 \cdot 2 \cdot 0 - a_1 = 1 \iff \boxed{a_1 = -1}$!!

se $n=0$ TROVO $a_1 \, 1 \, (-1) - a_0 = 0 \iff \boxed{a_0 = 1}$

Se $n \geq 2$ RISCRIVO (R.1) $\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2 - 1} \quad \forall n \geq 2}$

$$y(x) = 1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n \,?$$

a_2 è LIBERO ; se a_2 è fissato $\Rightarrow a_n$ DETERMINATI UNIVOCAMENTE $\forall n \geq 3$

Si vede come nel caso precedente che $R = +\infty$

QUESTO MOSTRA:

- NON È POSSIBILE ASSEGNARE POSIZIONE / VELOCITÀ IN $x = 0$:
  - o $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$ e allora c'è soluzione, MA NON È UNICA, dato che ho infiniti a_2 possibili
    oppure $y(0) \neq 1$ o $y'(0) \neq -1$ e allora NON $\exists$ soluzione

- QUELLO CHE POSSO FARE È ASSEGNARE $y''(0)$:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists$ UNICA LA SOL. di (E.1) con $y''(0) = \alpha$

INFATTI se voglio che $y''(0) = \alpha$, mi ricordo che

$$a_2 = \frac{y''(0)}{2} = \frac{\alpha}{2} \qquad \left(a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!} \right)$$

Dunque dato α, prendo $a_2 = \frac{\alpha}{2}$ e poi trovo a_n $\forall n \geq 3$ ($a_1 = -1$, $a_0 = 1$). Ho DETERMINATO $y(x)$ UNIVOCAMENTE

- <u>DOMANDA</u> Se impongo $y''(0) = 4$ $\Rightarrow$ ho un'unica $y(x)$ che risolve con questa condizione.

QUANTO fa $y^{(4)}(0)$??

<u>Per rispondere</u> : Se $y''(0) = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{2} = 2$. Da (R.1)

$$\underline{n=2} \Rightarrow a_3 = \frac{a_2}{4-1} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\underline{n=3} \Rightarrow a_4 = \frac{a_3}{9-1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} = a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{4!} = \frac{y^{(4)}(0)}{24} \Leftrightarrow \underline{y^{(4)}(0) = 2}$$

#