Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 42 11/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Serie di potenze: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ dove (a_n) è data $a_n \in \mathbb{R}$ $(/ \mathbb{C})$

$\boxed{\text{VISTO}}$ Se $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\Rightarrow$ $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$

f è una funzione C^∞, $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdot(n-k+1)\, a_n x^{n-k}$

e dunque $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (f è somma della sua serie di Taylor in $x=0$)

ESEMPI $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ha raggio di convergenza $R=1$

e vale $G(x) = \dfrac{1}{1-x}$ per $x \in]-1,1[$ (serie geometrica)

- Se deriso $G(x)$ trovo $G'(x) = \dfrac{-(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{se } -1 < x < 1$$

Ho trovato la somma di una serie SENZA PASSARE DALLE SOMME

Se moltiplico per x la formula sopra trovo

$$x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{cioè} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

potrei mettere $n=0$ (se $n=0$ $\quad nx^n=0$)

Per esempio se metto $x=\frac{1}{2}$ trovo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 2$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \quad \left(\text{perché quando } n=0 \quad n^2x^n = 0\right)$$

Mi chiedo se riesco a trovare la somma della serie $f(x)$

IN EFFETTI PRIMA DI CHIAMARE $f(x)$ questa somma devo vedere per quali x la serie converge.

Si tratta di una serie di potenze con $a_n = n^2 \Rightarrow$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}} = 1$$

DUNQUE f è ben definita su $]-1,1[$

(PARENTESI.. Il teorema sul raggio di convergenza dice che la $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge su $]-R,R[$ e non converge fuori da $[-R,R]$ NON DICE NULLA su cosa succede agli estremi $-R$ ed R. ← DIPENDE CASO PER CASO)

Nel nostro caso $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^2$ è chiaro che f NON ESISTE (la serie non converge) se $x=1$ / $x=-1$ perché in questi casi mi trovo $\sum_{1}^{\infty} n^2 = +\infty$ oppure $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n n^2$ che comunque non converge dato che il termine generale $(-1)^n n^2$ NON tende a zero $\left(|(-1)^n n^2| = n^2 \to \infty \right)$

EFFETTIVAMENTE il dominio di f è $]-1,1[$

Voglio trovare un modo di calcolare $f(x)$ per $x \in]-1,1[$??

Osservo che se derivo termine a termine la $f(x) = \sum n^2 x^n$ trovo $\sum n^3 x^{n-1}$ che sembra peggio della precedente.

CONVIENE "INTEGRARE" INVECE CHE DERIVARE

$\Leftrightarrow$ Cerco di indovinare una serie nota che con opportune operazioni di derivazione mi porti a $f(x)$.

IO CONOSCO $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ $x \in]-1,1[$

Se derivo $G(x) \Rightarrow$ $G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$

Moltiplico per $x \Rightarrow$ $x G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

Derivo di nuovo : $(x G'(x))' = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}}$ $= \frac{(1-x)^2 - x\, 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}$

$= \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

Moltiplico di nuovo per $x \Rightarrow$

$x(x G'(x))' = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ $\quad -1 < x < 1$

Per esempio ricavo $\sum_{\substack{n=0 \\ (n=1)}}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{(1/2)^3} = 6$

\#

Altro esempio Voglio calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = f(x)$

È una serie di potenze dove $a_0 = 0$ $a_n = \frac{1}{n}$ se $n \geq 1$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

Dunque $f(x)$ è ben definita su $]-1,1[$

IN REALTÀ $f(1)$ NON È DEFINITA, se $x=1$ trovo $\sum_n^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

MA $f(-1)$ È DEFINITA, se $x=-1$ trovo $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ che so essere convergente per Leibniz !!

Dunque $f: [-1, 1[\to \mathbb{R}$ (comunque $f':]-1, 1[$ e così f'' ...)

So che f è derivabile in $]-1, 1[$ e che $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

cambio di indice $m = n-1 \leftrightarrow n = m+1$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} x^{m} = G(x) \left(= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x} \qquad -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{1-x} dx$$

(è una relazione a meno di costante)

cioè $f(x) = -\ln(1-x) + cost$. La costante la trovo mettendo $x=0$

$$f(0) = cost \qquad f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = 0$$

IN DEFINITIVA $\boxed{f(x) = -\ln(1-x) \quad -1 < x < 1}$

DOMANDA Cosa succede per $x = -1$

so che $f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che esiste in $\mathbb{R}$, ma

al momento non so se posso mettere $x = -1$ nella formula

(so che f è C^{∞} in $]-1, 1[$, ma non so se f sia continua in $x = -1$)

SE RIESCO A DIM. che f è continua in $x = -1 \Rightarrow$

$$f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) = \ln(1/2)$$

IN EFFETTI QUESTA FORMULA È CORRETTA. LO DIMOSTRO FACENDO VEDERE CHE la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$ converge uniformemente su $[-1,0]$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}|x|}$$

$\boxed{\text{Nota}}$: la serie NON CONVERGE TOTALMENTE su $[-1,0]$ perché:

$$\max_{x\in[-1,0]} \left|\frac{(-1)}{n}|x|\right| = \frac{1}{n} \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

SI USA IL FATTO SEGUENTE (proprietà delle serie a segni alterni):

Se ho $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, a_n decrescente, $a_n \to 0$

e chiamo $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$. Allora si ho che

S_{2n} sono decrescenti
S_{2n+1} sono crescenti

$$S_{2n+1} \leq S_{2n}$$

$$|S_{k+1} - S_k| = a_{k+1}$$

$\Rightarrow$ detto $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $\Rightarrow$

$$S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \Rightarrow \begin{array}{l} S_{2n} - S \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{n+1} \\ S - S_{2n+1} \leq S_{2n} - S_{2n+1} = a_{n+1} \end{array}$$

Se prendo un intero n e valuto $\boxed{|S - S_n| \leq a_{n+1}}$

TORNIAMO AL NOSTRO PROBLEMA

Abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n}$ $\quad -1 \leq x \leq 0$

Sappiamo che questa serie è convergente su $[-1,0]$, chiamo $S(x)$ la somma della serie $(-1 \leq x \leq 0)$.

Chiamo $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k |x|^k}{k}$ (la somma n-esima)

Devo mostrare che $S_n \to S$ UNIF. su $[-1,0]$, cioè

$$M_n := \sup_{-1 \le x \le 0} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

MA QUI USO LA PROPRIETÀ SOPRA:

$$|S_n(x) - S(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad M_n \le \max_{-1 \le x \le 0} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

HO DIM. LA CONV. UNIF.

$$\left(\|S_n - S\| \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad S_n \to S \text{ UNIF} \right)$$

Ne deduco che $S(x)$ è una funzione continua di $x \in [-1, 0]$

$$\Rightarrow \quad S(-1) = \lim_{x \to -1} S(x) = \lim_{x \to -1} -\ln(1-x) = -\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ABBIAMO ANCHE TROVA UN ESEMPIO di serie che converge uniformemente ma non TOTALMENTE

cioè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad -1 \le x \le 0$ #