Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 41   10/03/2020

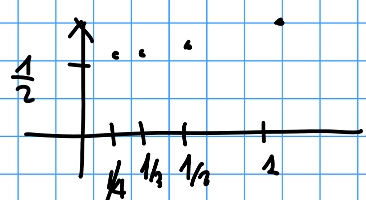
(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esempio (cont.) $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$. VISTO CHE

$S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- S è continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
- S è derivabile in ogni $x \neq 0$ e $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ $\forall x \neq 0$

In effetti dato che se $m \in \mathbb{N}$ $S(1/m) \geq 1/2$ $\Rightarrow$ NON PUÒ essere $\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0 = S(0)$



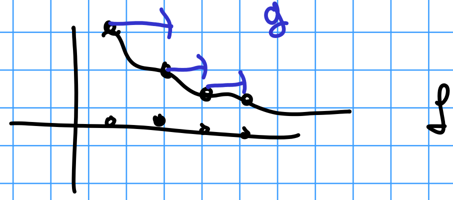
IN REALTÀ RIUSCIAMO A TROVARE ESATTAMENTE

$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

Scrivo la serie come l'integrale di una funzione "a scalini"

SO CHE, data comunque una $f(y)$ ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_1^{+\infty} g(y)\,dy \quad \text{dove } g(y) = f(n) \text{ se } n \leq y < n+1$$



$$g(y) = f([y])$$

$[y] = n$ con $n \in \mathbb{N}$ $\quad n \leq y < n+1$

$$\boxed{y-1 < [y] \leq y}$$

Nel nostro caso – se $x>0$ è fissato

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+[y]^2x^2}\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\,dy}{1+y^2x^2} \leq S(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{x\,dy}{1+(y-1)^2x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x\,dy}{1+y^2x^2}$$

cambio di variabile $t = xy$ $\quad dt = x\,dy$

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Faccio tendere $x \to 0^+$ e uso il confronto (DUE CARABINIERI)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Analogamente $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} S(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ #

SERIE DI POTENZE

Def. Data una successione di numeri (a_n) considero

la serie $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

UNA TALE SERIE VIENE DETTA "SERIE DI POTENZE" (centrata in zero). Potrei anche considerare

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad \text{(dove } x_0 \text{ è fissato)}$$

<u>OSS.</u> Sto considerando $a_n \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. POTREI anche considerare $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e considerare

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \underset{\sim}{\sim} \quad \text{polinomio di grado } \infty$$

se gli $a_n = 0$ per $n \geq k+1$

$\Rightarrow$ Ho UN POLINOMIO DI grado k

<u>DOMANDA</u> per quali x converge questa
(DIPENDERÀ dalla succ. (a_n))

<u>Def.</u> Chiamo <u>raggio di convergenza</u> della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ il numero R ($\in [0,+\infty]$)

definito da $R = \frac{1}{L}$ dove $\boxed{L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ se il limite esiste

$L \in [0,+\infty]$ e $R = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{se } L \neq 0,\ L \neq \infty \\ 0 & \text{se } L = +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0 \end{cases}$

<u>Nota</u> · limsup di una succ. è una nozione che estende la nozione di limite.

· limsup esiste SEMPRE (eventualmente $\pm\infty$)
· liminf " " (" ")

dato a_n $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ = massimo dei limiti a_{n_k} tra le a_{n_k} estratte da $\{a_n\}$ con (a_{n_k}) che ha limite

FATTO a_n HA LIMITE $\ell \Leftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n = \ell$

Teorema (intervallo/disco di convergenza per le serie di potenze)

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; sia R = raggio di convergenza. Allora:

1. · La serie converge puntualmente nell'intervallo $]-R, R[$ (cioè se $|x| < R \Rightarrow \sum_0^{\infty} a_n x^n$ CONVERGE)

(deve essere $R > 0$ altrimenti non ci sono punti con $|x| < R$)

Se $R = +\infty \Rightarrow$ la serie conv. pt. su $\mathbb{R}$,

· La serie non converge se $|x| > R$ ← ?

2. Se $r < R$, la serie converge uniformemente su $[-r, r]$ (TOTALMENTE)

(se $R = 0$ non mi dice nulla, se $R = +\infty \Rightarrow$ la serie converge unif su $[-r, r]$ $\forall r > 0$)

DIM. 1. Limitiamoci al caso in cui

$$\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Caso $L \in]0, +\infty[$ Prendo x con $|x| < R = \frac{1}{L}$

Applico il criterio della radice alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$

Se dimostro che $\sqrt[n]{|a_n x^n|} \to l < 1 \Rightarrow$ la serie $\uparrow$ CONV.

Ma $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \to |x| \cdot L = \frac{|x|}{R} < 1$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ conv. assolutamente $\Rightarrow$ converge

HO DIM. LA CONV. PUNTUALE

Se $L = 0$, ancora meglio, $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \to 0 < 1$ qualunque sia $x \in \mathbb{R}$

2. Fisso $r < R = \frac{1}{L}$. Calcolo

$$\max_{-r \le x \le r} |a_n x^n| = |a_n| r^n \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \max_{[-r,r]} |a_n x^n|} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$$

CONVERGE

Di nuovo applico il criterio della radice $\sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \sqrt[n]{|a_n|} \to r L = \frac{r}{R} < 1$

Ma la serie sopra è $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|$ dove $f_n(x) = a_n x^n$

su $A = [-r, r]$ $\Rightarrow$ ho DIM. LA CONV. TOTALE DELLA SERIE su $[-r, r]$ $\Rightarrow$ CONV. UNIF. SU $[-r, r]$

(se $L = 0$ la cosa funziona $\forall r > 0$)

- Mostriamo che se $|x| > R$ $\Rightarrow$ la serie non converge

IN EFFETTI ho che, se $|x| > R$

$b_n = |a_n x^n| = |a_n| |x|^n$ e $\sqrt[n]{|b_n|} \to \frac{|x|}{R} > 1$

$\Rightarrow |b_n| \to \infty \Rightarrow$ NON È POSSIBILE che $\sum b_n$ converga

#

Dunque se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di conv. $R > 0$ $\Rightarrow$

risulta definita la somma $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $|x| < R$

$\simeq \quad S :]-R, R[\to \mathbb{R}$

<u>OSS.</u> S è continua in $]-R, R[$. Infatti:

se prendo $x \in]-R, R[$ posso scegliere r con $|x| < r < R$ $\Rightarrow x \in [-r, r]$.

Dato che su $[-r, r]$ ho la conv. unif. $\Rightarrow$ la somma della serie è CONTINUA su $[-r, r]$ $\Rightarrow$ S è continua in x

Le serie di potenze sono C^0 (continue) nell'intervallo di convergenza $]-R, R[$

OSS. Si potrebbe fare tutto in $\mathbb{C}$:

$$a_n \in \mathbb{C}, \qquad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,+\infty]$$

$$R = \frac{1}{L} \in [0,+\infty[$$

$\Rightarrow$ La serie (complessa) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

- converge puntualmente nel disco aperto $B(0,R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$
- non converge fuori dal disco chiuso $\overline{B(0,R)}$ (negli z con $|z| > R$)
- converge unif. su ogni disco chiuso $\overline{B(0,r)}$ con raggio $r < R$

$\Rightarrow \quad S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è una funzione continua su $B(0,R)$

ESEMPIO $\quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad$ (serie geometrica)

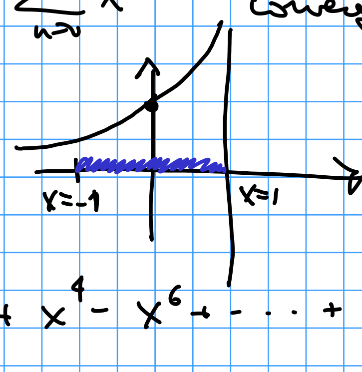
$a_n = 1 \ \forall n$. Raggio di conv $= \dfrac{1}{\lim \sqrt[n]{1}} = 1$

$\Rightarrow \quad G(z)$ è definita su $B(0,1) = \{ |z| < 1 \}$

NOI SAPPIAMO QUANTO FA $G(z)$. INFATTI

$$\sum_{n=0}^{K} z^n = \frac{1 - z^{K+1}}{1 - z} \xrightarrow{K\to\infty} \frac{1}{1-z} \quad \text{se } |z| < 1 \ (\Rightarrow z^{K+1} \to 0)$$

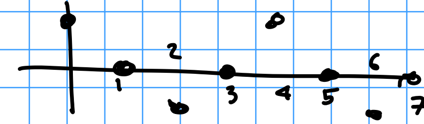
In particolare se prendo x reale $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge tra -1 e 1 e la sua somma è $\dfrac{1}{1-x}$



Esempio $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$

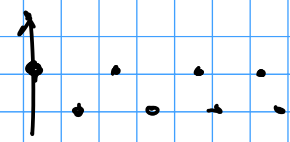
Se voglio scrivere questa serie come $\sum_0^\infty a_n x^n$ devo prendere

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ (-1)^k & \text{se } n = 2k \ (n \text{ PARI}) \end{cases}$$



Se voglio il raggio di conv. devo fare

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|a_{2k}|} = 1$$

$|a_n| =$ 

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

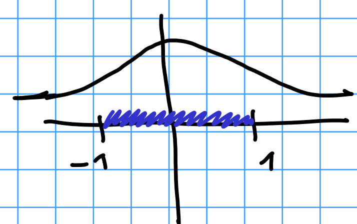
RAGGIO DI CONV. $= \boxed{1}$

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n}}$$

è definita su $]-1,1[$

Però posso anche scrivere $S(x) = \sum_{n=0}^\infty (-x^2)^n = G(-x^2)$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

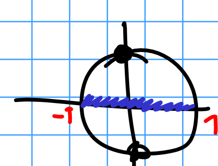


cosa c'entra $x = 1 / -1$ con la funzione $\frac{1}{1+x^2}$??

RISPOSTA GUARDA COSA SUCCEDE IN $\mathbb{C}$!!

Se guardo la serie complessa $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n z^{2n}$

$\to$ converge su $B(0,1)$ alla funzione $\frac{1}{1+z^2}$



IN $\mathbb{C}$ ci sono i punti $z = \pm i$ che annullano il denominatore. DI NUOVO VEDO CHE NON POSSO "ALLARGARMI" più di un raggio $R=1$ #

IN REALTÀ LE SERIE DI POTENZE DANNO DELLE SOMME DERIVABILI INFINITE VOLTE

TEOREMA Se (a_n) succ. di numeri e sia

$R = \frac{1}{L}$ $\quad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ è il raggio di conv.

della serie $\quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ALLORA

$S :]-R, R[\to \mathbb{R}$ è derivabile infinite volte e vale

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$S''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$\vdots$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{K \text{ FATTORI}} x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

$\forall x$ con $-R < x < R$

<u>DIM.</u> Caso della derivata prima. Faccio vedere che la serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

è ancora una serie di potenze con lo stesso raggio R

Per scriverla come serie di potenze, la devo scrivere

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m \qquad \left(\text{cambio di indice } \begin{matrix} m = n-1 \\ n = m+1 \end{matrix}\right)$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Raggio di conv $\longrightarrow$ $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{(n+1)}}_{\downarrow 1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L = \frac{1}{R}$$ TORNA

Anche $W = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di conv. R

$\Rightarrow$ W conv. UNIF. su $[-r, r]$ $(0 < r < R)$

POSSO DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI SERIE

$S = \sum a_n x^n$ e $W = \sum a_n n x^n$ conv. UNIF. su $[-r, r]$

$\Rightarrow$ S è derivabile e $S' = W$ su $[-r, r]$

Dato che $r < R$ è arbitrario $S(x)$ è derivabile e $S'(x) = W(x)$

$\forall x \in]R, R[$

Nello stesso modo si fa per una derivata qualunque #

$$\frac{d^k}{dx^k} S(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \qquad \forall x \in]-R, R[\quad \forall k \geq 0$$

Se metto $x = 0$ nella formula sopra $\Rightarrow$

$$S^{(k)}(0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} 0^{n-k} \underset{(n=k)}{=} a_k \frac{k!}{0!} = k!\, a_k$$

$$0^{n-k} = \begin{cases} 0 & \text{se } n-k>0 \\ 1 & \text{se } n-k=0 \end{cases}$$

DUNQUE, se $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}}$

I coefficienti a_n, mediante i quali ho definito $S(x)$ come serie di potenze, sono i COEFF. DI TAYLOR di S in $x=0$

SE $S(x) = \sum a_n x^n \Rightarrow$

<u>S è SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR</u> (IN ZERO)

Intendo che data una funzione f infinitamente derivabile in un intorno di zero, posso considerare i suoi coeff. di Taylor $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (in $x=0$) e definire la serie di Taylor come $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Se f <u>NASCE</u> come serie di potenze $\Rightarrow$
f è somma della sua serie di Taylor
nell'intervallo $]-R, R[$

(A) Se (a_n) è dato, se $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $R>0$, allora S è C^∞ e $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Ci si può chiedere se vale il viceversa:

(B) Se $S(x)$ è una funzione C^∞ in un intorno di zero e se $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$
allora $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vicino a zero? / <u>dovunque S è definita!</u>

(B) <u>non è vero in generale.</u>
Un primo motivo per cui non è vero è che non può essere vero che $S(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ <u>OVUNQUE</u> S sia definita all'inizio. Per esempio se $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$
abbiamo già visto che $S(x)$ è somma della sua serie di Taylor $\left(\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n} \right)$ <u>SOLO</u> per $-1 < x < 1$
nonostante che $S(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

• In realtà non vale neanche la forma più debole di (β)

CONTROESEMPIO Definisco $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(I) f è continua in $x=0$. $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0 = f(0)$

(II) f è derivabile in $x=0$ e $f'(0) = 0$.

Calcoliamo il rapporto incrementale di f vicino a zero

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \Delta(x) = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} \sqrt{y} =$$

$\frac{1}{x^2} = y \quad x^2 = \frac{1}{y}$

$x = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{\sqrt{y}}{e^y} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}}{e^y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{y}\, e^y} = 0$$

(III) f è derivabile due volte in $x=0$ e $f''(0) = 0$

Usiamo una conseguenza di de l'Hôpital:

Se $f^{(k)}(x)$ esiste per $x \neq 0$ e se $f^{(k)}(x) \to \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \ell = f^{(k)}(0)$

Nel caso della derivata seconda, per usare questo approccio

devo calcolare $f''(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} e^{-1/x^2} = e^{-1/x^2} \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -e^{-1/x^2} \frac{-2x}{x^4} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$$

(da qui si vede, in altro modo, che $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = 0$)

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{\cancel{x^3}} \cdot \cancel{x^3} - e^{-1/x^2}\, 3x^2}{x^6} = \frac{e^{-1/x^2}(1-3x^2)}{x^6}$$

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{-y}\left(1-\frac{3}{y}\right)}{(1/\sqrt{y})^6} = \qquad y=\frac{1}{x^2} \quad x=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{(y-3)}{\cancel{y}}\frac{y^{\cancel{3}}}{e^{y}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{(y-3)y^2}{e^{y}} = 0$$

(IV) ... f ammette derivate di qualunque ordine $k \in \mathbb{N}$
e $f^{(k)}(0) = 0$

SI DEVE ITERARE IL RAGIONAMENTO SOPRA
MOSTRANDO CHE

se $x \neq 0$ $\quad f^{(k)}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2k}} P_k(x) \qquad P_k$ opportuno polinomio

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{e^{y}}\, y^k\, P_k\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 0 \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ x = \frac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$

<u>RIASSUMENDO</u> $\quad f$ è C^∞ e $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k$

(in altri termini $\quad f(x) = o(x^k) \quad \forall k$ intero
$f(x) \to 0$ più rapidamente di qualunque potenza)

<u>DUNQUE</u> <u>i coeff. di Taylor di f sono tutti nulli</u>

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo serie di Taylor di f è identicamente nulla.

MA $f(x) \neq 0$ se $x \neq 0$ $\quad e^{-1/x^2} > 0$ se $x \neq 0$ e quindi

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{qualunque sia } x \neq 0$$

QUESTA non è somma della sua serie di Taylor in nessun punto $x \neq 0$ #

DUNQUE LE SERIE DI POTENZE DEFINISCONO DELLE FUNZIONI C^∞ MOLTO PARTICOLARI

Una funzione che nasce come somma di una serie di potenze è univocamente determinata da tutte le sue derivate in $x=0$:

|| Se f è una serie di potenze, se $f^{(k)}(0)=0$ $\forall k$ $\Rightarrow$ $f(x)=0$ $\forall x \in]-R,R[$ ||

Questa proprietà ricorda la proprietà dei polinomi:
Se $P(x)$ è un polinomio di grado m e se $P^{(k)}(0)=0$ $\forall k=0,1,\dots,m$ $\Rightarrow$ $P(x)=0$ $\forall x$
(lo stesso se $P^{(k)}(x_0)=0$ $\forall k=0,1,\dots,m$)