Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 40 09/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Studio delle SERIE DI FUNZIONI

Una serie di funzioni $\to$ SOMMARE UNA SUCC. DI FUNZIONI

**Def.** Data una succ. di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ (di solito $N = M = 1$) consideriamo le SOMME PARZIALI di $(f_n)$

$$S_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \forall x \in A$$

(si chiama anche ridotto $n$-esimo).

$S_n$ è una nuova successione di funzioni $S_n : A \to \mathbb{R}^M$

1. Se $S_n$ converge puntualmente a una funzione $S : A \to \mathbb{R}$ diremo che la "serie delle $f_n$ è convergente puntualmente su $A$" oppure che la "successione delle $f_n$ è SOMMABILE puntualmente su $A$"
Si chiama SOMMA (puntuale) della serie questa $S(x)$ definita appunto

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

DI SOLITO SI INDICA LA SOMMA con

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Con un certo abuso di linguaggio si indica con $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la "SERIE" delle $f_n$ e CIOÈ la successione $(S_n)$ delle somme parziali.

(2) Diremo che la "serie delle $f_n$ converge unif. su A" se esiste il limite uniforme $S$ delle $S_n$; cioè se esiste $S(x)$ tale che $S_n \to S$ UNIF. SU A

Si dice anche che "la successione $(f_n)$ è uniformemente sommabile"

OSS Se la serie è unif. conv. $\Rightarrow$ la serie è puntualm. convergente. Dunque

$\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ è unif. convergente $\Leftrightarrow$ $\sum f$ è puntualmente convergente ($\Rightarrow \exists$ la somma della serie) e $\sum_{k=1}^{K} f_k \xrightarrow{\text{UNIF.}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \to 0 \quad \text{UNIFORMENTE}$$

$$S_n - S = \sum_{1}^{n} f_n - \sum_{1}^{\infty} f_n$$

CIOÈ $\sup_{x \in A} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

#

ESEMPIO La serie geometrica. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

è una serie di funzioni i cui addendi sono $f_n(x) = x^n$

OGNI $f_n$ è definita da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

MI POSSO CHIEDERE SE TALE SERIE SIA PUNTUALM. CONV. IO SO CHE, $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \neq 1$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \left( S_n(1) = n+1 \right)$$

$$\underset{1+x+x^2+\dots+x^n}{\shortparallel}$$

tende a zero se $|x|<1$
se $x \geq 1$ tende a $+\infty$
se $x \leq -1$ NON HA LIMITE

Se faccio tendere $n \to \infty$ TROVO CHE

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & |x|<1 \\ +\infty & x \geq 1 \\ \text{NON ESISTE} & x \leq -1 \end{cases}$$

DUNQUE LA SERIE CONVERGE PUNT. SU $]-1,1[$.
(e non converge in altri punti)

– DOMANDA: Posso dire che la serie geometrica converge uniformemente su $]-1,1[$ ??

Devo vedere se $S_n(x) - S(x)$ converge unif. a ZERO cioè se

$$\left| \frac{1}{1-x}\left(1-x^{n+1}\right) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \text{UNIF su } ]-1,1[\ ??$$

$$\iff \sup_{|x|<1} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

MA QUESTO ESTREMO SUP. VALE $+\infty$; se $x \to 1$

$$\frac{|x|^{n+1}}{1-x} \to +\infty \qquad \text{(sempre, non tende a zero)}$$

$\Longrightarrow$ NON HO CONV. UNIF. SU $]-1,1[$

Se ci mettiamo però su $[-1+\delta, 1-\delta]$ con $\delta > 0$ qualunque

$$\Rightarrow \sup_{[-1+\delta,1-\delta]} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = \frac{(1-\delta)^{n+1}}{\delta} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

QUINDI La serie geometrica converge unif. su $[-1+\delta, 1-\delta]$ qualunque sia $\delta>0$ (piccolo), NON CONV. UNIF. su $]-1,1[$

**Teorema** Supponiamo che $(f_n)$ sia una succ. di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, $A \subset \mathbb{R}^N$; supponiamo che "la serie delle $f_n$ sia uniformemente convergente su $A$". ALLORA.

(a) (LIMITE SOTTO IL SEGNO DI SERIE)

- se $x_0$ è di accumulazione per $A$, se per ogni $n$ $\exists\ \ell_n = \lim_{x \to x_0} f_n(x)$.

ALLORA

- la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n$ è convergente e
- $\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell_n \left( = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$

IN PARTICOLARE: se $f_n$ sono continue in $x_0 \in A \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è continua in $x_0$

(b) (Integrazione sotto il segno di serie).

$A \subset \mathbb{R}^N$ di misura finita, $f_n$ siano integrabili su $A$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è integrabile su $A$ e

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x)\, dx$$

(c) (derivata sotto il segno di serie)

Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono di classe $C^1$. Se

(i) $\sum f_n$ converge puntualmente e

(ii) $\sum f_n'$ converge uniformemente, ALLORA

LA SOMMA $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ è di classe $C^1$ e

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n$$

**IDEA DI DIM.** Basta applicare i rispettivi risultati per le succ. di funzioni alla successione $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Per esempio dimostriamo (c).

Per ipotesi so che

(i) $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \longrightarrow S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [a,b]$

(ii) $\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \longrightarrow G(x)$ UNIF. SU $[a,b]$

$\sum_{k=1}^{n} f_k'$ $\quad G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

$\Rightarrow$ $S$ è derivabile e $S' = G$ CIOE'

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Condizioni per dimostrare la conv. unif. di $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

IN GENERALE È DIFFICILE CONOSCERE $S_n(x)$ e del limite $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n$ e quindi non è chiaro come dimostro che $S_n \to S$ UNIF.

<u>DEF</u> (Convergenza TOTALE) Data $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$

dico che "la serie delle $f_n$ è <u>TOTALMENTE CONVERGENTE</u>" se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, A} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in A} \|f_n(x)\|_{\mathbb{R}^M} < +\infty$

<u>NOTA</u> La serie $\sum_{1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ è una SERIE <u>NUMERICA</u> a termini positivi. DUNQUE la somma $\sum_{1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ è BEN DEFINITA e ha valore in $[0, +\infty]$.

Per dire se questa serie numerica è finita ho a disposizione dei CRITERI ( <u>CONFRONTO</u>, RADICI, RAPPORTO )

TEOREMA (di conv. TOTALE) Se $f_n$ è una successione di funzioni tali che la serie $\sum f_n$ è TOTALMENTE CONV. $\Rightarrow$ la $\sum f_n$ è UNIF. CONV.

IDEA DI DIM. Ricordiamo che abbiamo introdotto

$$\mathcal{B}(A) = \{ f : A \to \mathbb{R}^N, \text{ tali che } \|f\|_{\mathbb{R}^M} \text{ limitata} \}$$

e in $\mathcal{B}(A)$ la introdotta la norma uniforme

$$\|f\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^M}$$

Abbiamo visto che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma nello spazio vettoriale $\mathcal{B}(A)$.

Allora è che la conv. totale corrisponde alla "CONVERGENZA ASSOLUTA" IN $\mathcal{B}(A)$

Avevamo visto nelle prime lezioni che la conv. assoluta di $\sum x_n$ in uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ con una norma $\|\cdot\| \Rightarrow$ la convergenza della serie SE $\mathbb{X}$ è COMPLETO

se $\sum \|x_n\| < +\infty \to \sum x_n$ converge in $\mathbb{X}$ (A PATTO CHE)

[SI PUÒ DIM. (NON LO FACCIAMO) che $\mathbb{X} = \mathcal{B}(A)$, con la norma uniforme è COMPLETO.]

#

CONV. TOTALE $\Rightarrow$ CONV. UNIF (su A ...)

$\left(\sum \|f_n\|_\infty < +\infty\right)$ $\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ esiste } \forall x \in A \text{ e } \sum_{n=1}^{K} f_n \xrightarrow{K \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ UNIF.} \right)$

Per esempio torniamo alla serie geometrica

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } -1 < x < 1$$

chiamo $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ ( $H$ è la serie delle derivate di $G$ )

Vorrei sapere se la serie $H$ conv. unif da qualche parte

Provo con la conv. totale. CONSIDERO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sup_{-1<x<1} n |x^{n-1}|}_{n} < +\infty \quad ?? \qquad \text{COSÌ NON VA}$$

$\sum n = +\infty$

Fissiamo $\delta > 0$ e consideriamo la conv. totale su $[-1+\delta, 1-\delta]$ $\subseteq ]-1,1[$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{-1+\delta \le x \le 1-\delta} n |x^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} n (1-\delta)^{n-1}$$ ← questa serie converge (per il criterio della radice)

$$\sqrt[n]{n(1-\delta)^{n-1}} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{(1-\delta)^{n-1}} = \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{1}{1-\delta}} (1-\delta) \to 1-\delta < 1$$

$\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{\frac{1}{1-\delta}} \to 1$

$\Rightarrow$ la serie ⊛ CONVERGE $\Rightarrow$ la serie $\sum_{1}^{\infty} n x^{n-1}$ CONV TOTALMENTE e DUNQUE UNIF. su $[-1+\delta, 1-\delta]$

Dunque abbiamo (fissato $\delta > 0$)

- $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge puntualmente su $]-1,1[$ e $G(x) = \frac{1}{1-x}$
- $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$ conv. unif su $[-1+\delta, 1+\delta]$

$\Rightarrow$ $G$ è derivabile e $H = G'$ Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = G'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ho trovato la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ !!

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \; //$$

**Esempio** Consideriamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ $\left( \text{qui } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \right)$

(1) Per quali $x$ la serie converge (CONV. PUNT. della serie $\sum f_n$)

Se $x=0$ trovo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 0 \Rightarrow$ CONV

Se $x \neq 0$ $\left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2|x|^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{|x|}$

So che $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ è (assolutamente) conv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ la serie converge per ogni $x$

POSSO CHIAMARE $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ ho definito una $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

**DOMANDA** $S$ è continua ?! NON CONOSCO l'espressione di $S(x)$

Devo RICONDURMI AI TEOREMI DI PRIMA $\to$ MI serve ~~la~~ conv. unif. della serie

(2) Posso dire se la serie conv. unif su $\mathbb{R}$ ANZI

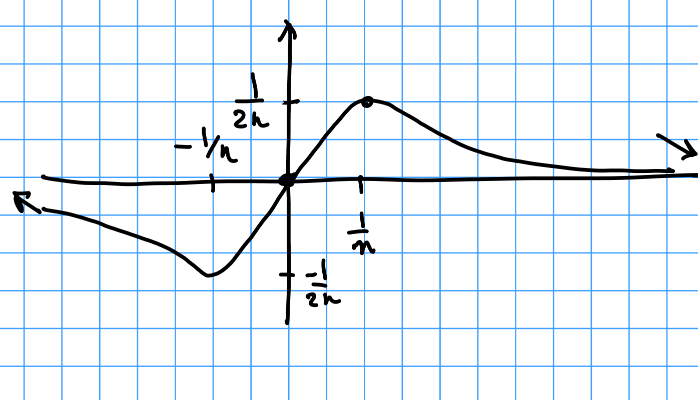
" " " " " CONV. TOTALMENTE su $\mathbb{R}$ ?!

devo vedere cosa fa la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x}{1+n^2x^2} \right|$$

Per calcolare il sup scritto sopra faccio uno studio di funzione di $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

- $f_n$ è DISPARI
- $f_n(0) = 0 = \lim_{x \to \pm\infty} f_n(x)$ $(n \geq 1)$
- $f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} =$

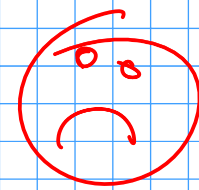


$= \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ e si annulla in $x = \frac{\pm 1}{n}$

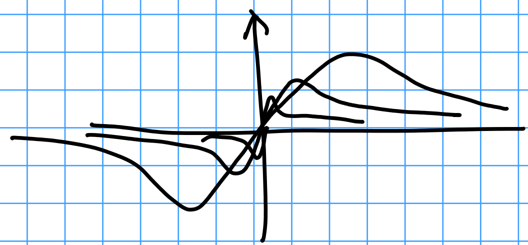
$$\Rightarrow \max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+n^2(1/n)^2} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2n}$$

$\boxed{\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{2n}}$ PURTROPPO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$

NO CONV. TOTALE SU IR !!



(3) Noto che i punti di max per $|f_n|$ sono $\pm\frac{1}{n} \to 0$

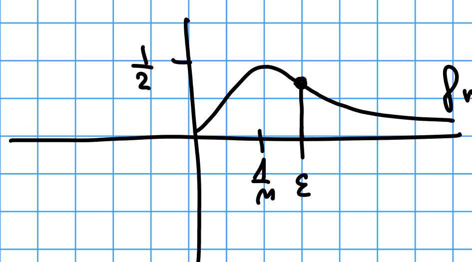


VIENE L'IDEA DI DISCOSTARSI DA $X=0$

Fisso $\varepsilon>0$ e mi metto in $A\ (= A_\varepsilon) = [\varepsilon, +\infty[\ = \{x \geq \varepsilon\}$

Vediamo se la serie conv. TOTALMENTE su $A = [\varepsilon, +\infty[$

$$\|f_n\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = \max_{x\geq\varepsilon} \frac{x}{1+x^2n^2}$$




Se $\varepsilon>0$ è fissato $\Rightarrow$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ per $\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

Per tutte le $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\max_{x\geq\varepsilon} f_n(x) = f_n(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2}$

VEDO CHE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} < +\infty$ perché $\frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} \simeq \frac{1}{n^2}\frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONV. TOTALE su $[\varepsilon, +\infty[$

$\Rightarrow$ CONV. UNIF su $[\varepsilon, +\infty[$

$\Rightarrow S(x) = \sum_{1}^{\infty} f_n(x)$ è continua su $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ $S(x)$ è continua in ogni punto $x_0 > 0$

( dato $x_0 > 0$ trovo $\varepsilon > 0$ per cui $x_0 \in [\varepsilon, +\infty[$ )

IN DEFINITIVA $S$ è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

(nelle $x < 0$ posso ragionare per simmetria $S(-x) = -S(x)$ )

$x \longmapsto \underbrace{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}}}_{S(x)}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ tranne l'origine.

(4) $S$ NON È CONTINUA in $x=0$

$S(0) = 0$, se fosse continua $S(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$

Dico che $S(x)$ non tende a zero per $x \to 0^+$

Fisso un intero $m \in \mathbb{N}$. Valuto il valore $S(1/m)$

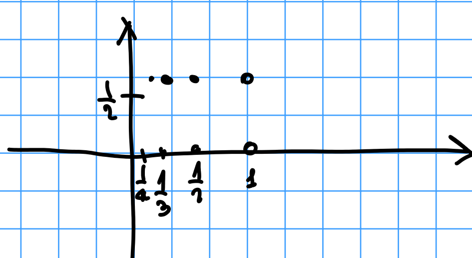
$$S(1/m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/m}{1+\frac{n^2}{m^2}} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{n^2}{m^2}} \geq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}$$

$$\left( \text{se } n \leq m \Leftrightarrow \frac{n}{m} \leq 1 \Rightarrow 1+\left(\frac{n}{m}\right)^2 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \geq \frac{1}{2} \right) \quad \geq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{m} \Big( \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{m \text{ addendi}} \Big) = \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2}$$

Ho trovato $S\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

NON È POSSIBILE che $S(x) \to 0$ per $x \to 0^+$




$S$ NON È CONTINUA IN ZERO (nonostante che le funzioni $\frac{x}{1+n^2x^2}$ siano chiaramente continue in $x=0$)

$S(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ è continua in ogni punto $\neq 0$

NON è cont. in $x=0$

$\Rightarrow$ NON è possibile che la serie converga unif su $\mathbb{R}$

(5) Posso calcolare $\lim_{x \to +\infty} S(x) = ??$

SÌ perché so che $\forall n$ $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$

e poi so che la serie $\boxed{\text{conv. UNIF}}$ su $[1, +\infty[$ (su $[\varepsilon, +\infty[$ $\forall \varepsilon > 0$) ; $+\infty$ è pto di acc. per $[1, +\infty[$

$\therefore$ (teorema di scambio dei limiti) $\Rightarrow$ $\lim_{x \to +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

(6) DOMANDA Posso dire che $S(x) = \sum_1^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ è derivabile nelle $x \neq 0$

Consideriamo la serie delle derivate $W(x) = \sum_1^{\infty} \overbrace{\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}}^{f_n'(x)}$

Cerco di dim che la serie $W$ è TOTALMENTE CONV. su $[\varepsilon, +\infty[$ ($\varepsilon > 0$ è fissato, come prima).

Devo calcolare

$$\|f_n'(x)\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = \sup_{x \geq \varepsilon} \left| \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} \right| \leq$$

$$\sup_{x \geq \varepsilon} \frac{1+n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \sup_{x \geq \varepsilon} \frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{1+n^2\varepsilon^2} \simeq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\varepsilon^2} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty, [\varepsilon, \infty[} < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ conv. TOT. $\Rightarrow$ CONV. UNIF $\Rightarrow$

[DA RICORDARE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CONV. $\Leftrightarrow \alpha > 1$]

POSSO DERIVARE SOTTO IL SEGNO DI SERIE.

NE DEDUCO CHE

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$$ è derivabile in $x$ $\forall x\neq 0$

($\forall x\geq \varepsilon$, poi $\varepsilon>0$ è arbitrario)

e $$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$\#$