Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 39 04/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Proprietà di CONV. UNIF e PUNT. rispetto alla CONTINUITÀ e INTEGRALE

C. UNIF. va d'accordo con la continuità e con l'integrale su insiemi di mis. finita CIOÈ:

- Se $f_n \to f$ UNIF. e se f_n continue in x_0 ALLORA f è continua in x_0
- Se f_n continue su $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$

(al posto di $[a,b]$ si può considerare $A \subset \mathbb{R}^N$ con $|A| < +\infty$ e allora $\int_A f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_A f(x)\,dx$

Relazione tra convergenza e derivabilità.

CI PIACEREBBE:

$\begin{cases} \text{Se } f_n \to f \text{ unif su } [a,b], \ f_n \text{ sono derivabili} \\ \text{anche } f \text{ è derivabile e } f_n' \to f' \end{cases}$

DETTO COSÌ È FALSO. CI VUOLE QUALCHE IPOTESI AGGIUNTIVA. Vale il teorema che segue

Teorema (scambio tra derivata e limite in n).

Supponiamo che $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n siano di classe C^1 e supponiamo che, $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$

- $f_n \longrightarrow f$ PUNTUALMENTE SU $[a,b]$
- $f_n' \longrightarrow g$ UNIFORMEMENTE SU $[a,b]$. ← !!

ALLORA f è derivabile e $f' = g$. INOLTRE $f_n \to f$ UNIF.

DUNQUE se $f_n \to f$ UNIF. (*) NON È detto che f sia derivabile, e anche se f è derivabile non è detto che $f_n' \to f'$

PERÒ se f_n' CONVERGE UNIF. A QUALCOSA, quel QUALCOSA è necessariamente f'

(*) vediamo dopo dei controesempi

LA DIM. SI BASA SUL Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Teorema (TFCI) Supponiamo $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Sono equivalenti

(a) f è di classe C^1 e $g = f'$

(b) $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b]$

DIM (del teorema di scambio derivata / limite in n)

So che le f_n sono C^1 dunque (vale (b) di T.F.C.I)

$$\int_a^x f_m'(t)\,dt + f_m(a) = f_m(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

perché $f_n' \to g$ UNIF. SU $[a,b]$ | conv. pt. di f_n a f | posso al limite per $n \to \infty$

$$\Rightarrow \int_a^x g(t)\,dt + f(a) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

da cui, per la (a) del T.F.C.I, f è C^1 e vale $f' = g$

Dimostro che la conv. di f_n a f è uniforme:

Prendo $x \in [a,b]$.

$$f(x) - f_n(x) = f(a) - f_n(a) + \int_a^x \left(f'(t) - f_n'(t)\right) dt$$

faccio il valore assoluto $\Rightarrow$

$$|f(x) - f_n(x)| \le |f(a) - f_n(a)| + \int_a^x |f'(t) - f_n'(t)| \, dt \le$$

$$\le |f(a) - f_n(a)| + \int_a^b |f'(t) - f_n'(t)| \, dt$$

$$\le |f(a) - f_n(a)| + \int_a^b \|f' - f_n'\|_\infty \, dt =$$

$$= |f(a) - f_n(a)| + (b-a) \|f' - f_n'\|_\infty$$

Dato che la disuguaglianza vale $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\|f - f_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)| \le |f(a) - f_n(a)| + (b-a) \|f' - f_n'\|_\infty$$

Se $n \to \infty$ so che $|f(a) - f_n(a)| \to 0$ (conv. pt. in $x=a$)

$\|f' - f_n'\|_\infty \to 0$ (per ipotesi)

$\Rightarrow$ $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ cioè $f_n \to f$ UNIF. su $[a,b]$ #

<u>CONTROESEMPI</u> che mostrano che non è vera l'affermazione iniziale.

<u>ESEMPIO</u> Trovo delle f_n con $f_n \to f$ unif, f è C^1 ma $f_n' \not\to f'$. POSSO PRENDERE:

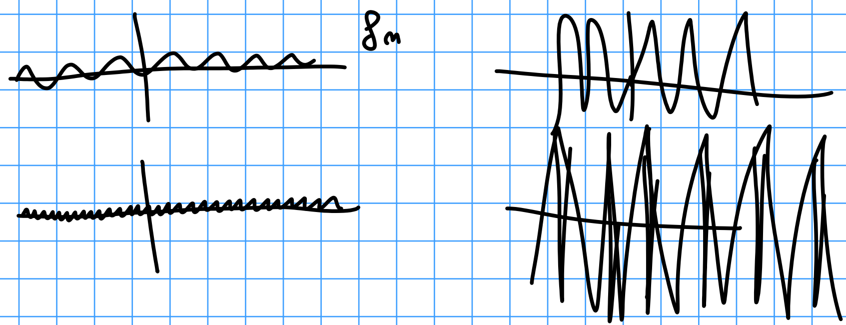
$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$

Vediamo che $f_n \to 0$ uniformemente su $\mathbb{R}$. In effetti

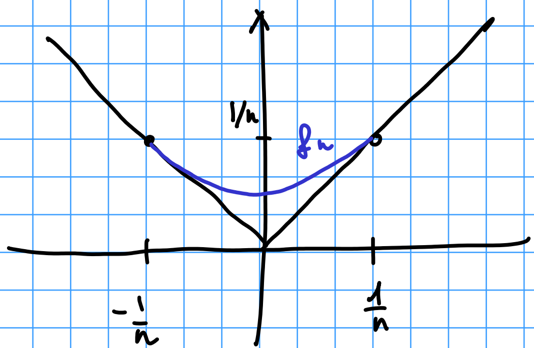
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin(n^2 x)}{n} \right| = \frac{1}{n} \; ; \text{ DUNQUE } f_n \to 0 \text{ UNIF.}$$

$$f_n'(x) = \frac{n^2\cos(n^2 x)}{n} = n\cos(n^2 x)$$

Vedo che, se metto $x=0$, $f'_n(0) = n \to +\infty$. QUINDI non è possibile che $f_n' \to 0$ in qualche senso.



ESEMPIO Caso in cui $f_n \to f$, f_n C^1 ma f non è derivabile



$f(x)=|x|$

Modifico $f(x)=|x|$ nell'intervallo $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, sostituendo a f un arco di parabola che si raccorda con f (nei punti $\pm\frac{1}{n}$) in modo C^1

Quindi tra $-\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n}$ considero $f_n(x) = a_n x^2 + b_n$ e cerco a_n e b_n in modo che $\boxed{f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \quad f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = 1}$

(automaticamente ne segue $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ $\quad f_n'\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$)

(i) $a_n \left(\frac{1}{n}\right)^2 + b_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ (ii) $2 a_n \frac{1}{n} = 1$

$\Rightarrow a_n = \frac{n}{2}$ e $\frac{\cancel{n}}{2}\frac{1}{n^{\cancel{2}}} + b_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$

DUNQUE DEFINISCO
$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq 1/n \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{se } |x| \leq 1/n \end{cases}$$

le f_n sono di classe C^1; $f_n \to f$ unif perché