Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

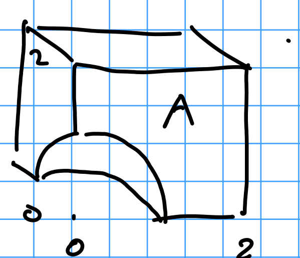
Lezione 38 03/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esercizi (in vista del compitino)

$$\iiint_A \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$$

$$A = \{ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 2,\ x^2+y^2+z^2 \ge 1 \}$$



$A = Q \setminus D$

$Q = [0,2] \times [0,2] \times [0,2]$

$D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 1 \}$

IL MODO PIÙ SEMPLICE È:

$$\iiint_A = \iiint_Q - \iiint_{D\cap Q}$$

- Facciamo l'integrale su Q:

$$\int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 dz \left(\frac{xy}{\sqrt{z}} \right) = \int_0 x\,dx \int_0 y\,dy \int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{z}} =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^2 \left[\frac{z^{1/2}}{1/2} \right]_0^2 = \frac{4}{2}\ \frac{4}{2}\ 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

· L'altro integrale :

$$\iiint_{D\cap Q} \frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{1} d\rho \left(\frac{\rho\cos\theta\sin\varphi\,\rho\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{\rho}\,\sqrt{\cos\varphi}}\right)\rho^2\sin\varphi$$

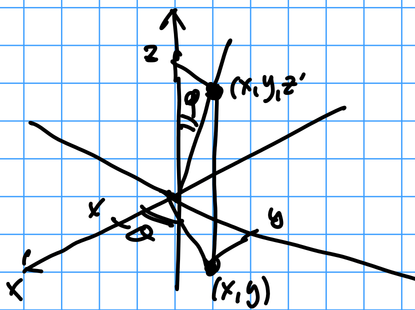
$$=$$

(coordinate sferiche)

$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \qquad 0\le\theta\le 2$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad 0\le\varphi\le\pi$

$z = \rho\cos\varphi \qquad \rho\ge 0$



$dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi\,d\rho$

$\rho\cos\theta\sin\varphi \ge 0$

$\rho\sin\theta\sin\varphi \ge 0$ $\qquad \sin\varphi\ge 0$

$\rho\cos\varphi \ge 0 \leftrightarrow 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$\cos\theta\ge 0 \quad \sin\theta\ge 0 \leftrightarrow \theta\in[0,\pi]$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta}_{1} \underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\,d\varphi}_{2} \underbrace{\int_0^{1}\rho^{\frac{7}{2}}\,d\rho}_{3} =$$

$$1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\Big(-\cos(\pi)+\cos(0)\Big) = \frac{1}{2}$$

$$2 = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos^2\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$\int_1^0\frac{1-t^2}{\sqrt{t}}(-dt) = \int_0^1\frac{1-t^2}{\sqrt{t}}\,dt =$$

$t = \cos\varphi$

$dt = -\sin\varphi\,d\varphi$

$$\left[2\sqrt{t} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_0^1 = 2-\frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$3 = \left[\frac{2}{9}\rho^{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9} \implies$$

$$\text{INTEGRALE} = 8\sqrt{2} - \frac{1}{2}\,\frac{8}{5}\,\frac{2}{9} = \boxed{8\sqrt{2}-\frac{8}{45}}$$

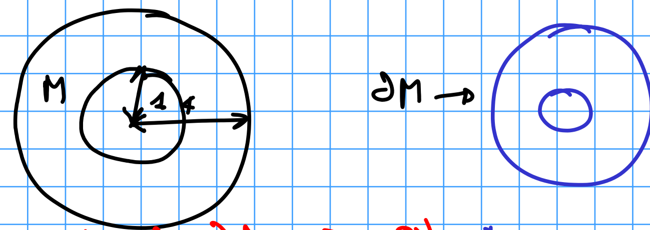
#

Alcune domande

(1) $M = \{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

La frontiera ∂M è descritta da una curva chiusa regolare

$\boxed{SI}$ $\quad$ $\cancel{\boxed{NO}}$



COMMENTO (anche se la regolarità è chiara dist. da ∂M è NOTO) DUE CURVE

Comunque ∂M è descritto da un'unione di curve regolari PERCHÉ se $(x,y) \in \partial M$ so che

$x^2 + y^2 = 4$ oppure $x^2 + y^2 = 1$

$G_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ $\qquad$ $G_2(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ $\qquad$ $\left(M = \{G_1 < 0, G_2 < 0\} \right)$

Sia G_1 che G_2 sono "regolari" cioè:

$\nabla G_1 \neq 0$ nei punti in cui $G_1 = 0$ $\qquad$ $\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ ← SONO NULLI SOLO IN $(0,0)$

$\nabla G_2 \neq 0$ " " " " $G_2 = 0$ $\qquad$ $\nabla G_2 = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$

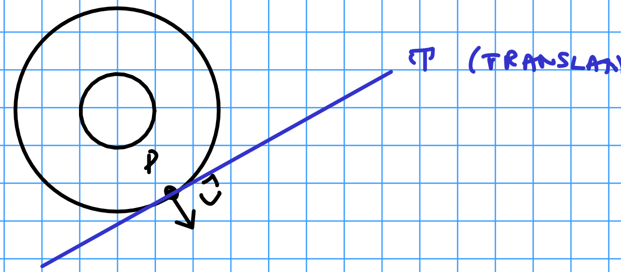
$\Rightarrow$ $\partial M = \{G_1 = 0\} \cup \{G_2 = 0\}$ e ∂M è localmente grafico di una curva

INOLTRE Posso dire che se $P = (x,y) \in \{G_1 = 0\}$

cioè $x^2 + y^2 = 4$ $\Rightarrow$ la normale unitaria uscente da M in P

è data da $\hat{\nu}(P) = \dfrac{\nabla G_1(P)}{\|\nabla G_1(P)\|} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$

Per esempio se $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\hat{\nu}(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



INOLTRE IN P è definito il piano tangente (RETTA) definito da $\{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0\} = T$

② Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua e sia $Q = [0,1] \times [0,1]$

$\Rightarrow$ il massimo di f su Q è assunto in un punto $(x_0, y_0) \in \partial Q$ $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$

Per esempio $f(x,y) = -(x-1/2)^2 - (y-1/2)^2$. Allora

$f(x,y) \leq 0$. $f(1/2, 1/2) = 0$ $\Rightarrow$ $\max_Q f = 0$
$(1/2, 1/2) \in Q$

se $(x,y) \neq (1/2, 1/2) \Rightarrow f(x,y) < 0 \Rightarrow$ il massimo è assunto SOLO in $(1/2, 1/2) \notin \partial Q$

Naturalmente $\nabla f(1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!!

Osserviamo che, non essendoci altri pti stazionari $\Rightarrow$ $\min_Q f$ è assunto su ∂Q

Per curiosità cerchiamo il $\min_Q f$ (dove f è quella sopra)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2(x-1/2) \\ -2(y-1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+1 \\ -2y+1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\} = \{G_1 \leq 0, G_2 \leq 0, G_3 \leq 0, G_4 \leq 0\}$$

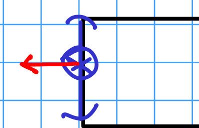
$G_1 = -x \qquad G_2 = x-1 \qquad G_3 = -y \qquad G_4 = y-1$

$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla G_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Uso i moltiplicatori (DEVO CONSIDERARE 4 CASI in cui si annulla un solo vincolo + 4 casi in cui si annullano due vincoli)

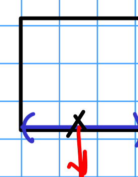
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla G_1 \\ G_1 = 0 \quad G_2 < 0 \quad G_3 < 0 \quad G_4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+1 = -\lambda \\ -2y+1 = 0 \\ x=0, \quad 0<y<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 1/2 \\ x=0, \quad 0<y<1 \end{cases} \qquad (0, 1/2)$$

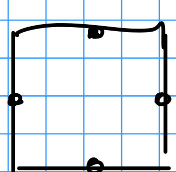


Analogamente

$$\begin{cases} -2x+1 = 0 \\ -2y+1 = -\lambda \\ y=0 \quad 0<x<1 \end{cases} \iff \left(\tfrac{1}{2}, 0\right)$$



e poi, nello stesso modo, trovo $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$



Se invece coincidono due vincoli: ho i vertici

$(0,0) \quad (0,1) \quad (1,0) \quad (1,1)$

Calcolo f in questi punti

- $f(0, 1/2) = f(1, 1/2) = f(1/2, 0) = f(1/2, 1) = -\frac{1}{4}$
- $f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

DUNQUE il minimo vale $\boxed{-\frac{1}{2}}$

(3) Si calcoli $\max\limits_{x^2+y^2=1} (x+y)$ $\qquad f(x,y) = x+y$

Moltiplicatori su $M = \{\underbrace{x^2+y^2-1}_{G(x,y)} = 0\}$ $\qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

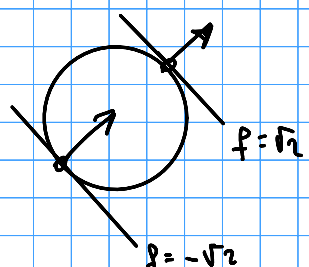
$\nabla G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0$ se $G(x,y) = 0$ $\qquad$ Devo studiare

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla G \\ G = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x \\ 1 = \lambda \cdot 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda x = 2\lambda y = 1$$

$\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

I PUNTI STAZ. VINCOLATI SONO $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



$f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ MAX $= \sqrt{2}$, MIN $= -\sqrt{2}$

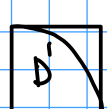
(4) La funzione $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è integrabile su $Q = [0,1]\times[0,1]$

~~$\boxed{SI}$~~ $\qquad \boxed{NO}$

Nota $f \geq 0$, misurabile (reciproco di una continua)

OSS. f è integrabile su $Q \iff f$ è integrabile su

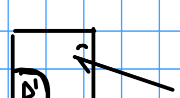
$D' = Q \cap D = \{x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$



perché f è continua su $Q \setminus D' \Rightarrow$

f è integrabile su $Q \setminus D'$

(potevi anche prendere $D' = Q \cap D(0,\rho)$ $\qquad \rho \leq 1$



Posso calcolare l'integrale su D', usando le coordinate polari

$$\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^{\pi/2} d\theta}_{\frac{\pi}{2}} \; \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho}_{=1} = \frac{\pi}{2}$$

(5) f è integrabile su $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $|f|$ è integrabile su $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$

(per come è stato definito l'integrale di Lebesgue)

<u>Ricorda che:</u> se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o da $I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo)

<u>NON COINCIDONO</u> (a) (L'integrabilità in senso improprio secondo Riemann)

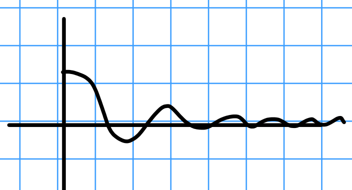
(b) (L'integrabilità secondo Lebesgue)

almeno nel caso di funzioni che <u>cambiano segno</u>

(se $f \geq 0$ allora (a) $\Rightarrow$ (b))

Per esempio $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ NON È INTEGRABILE SECONDO LEBESGUE

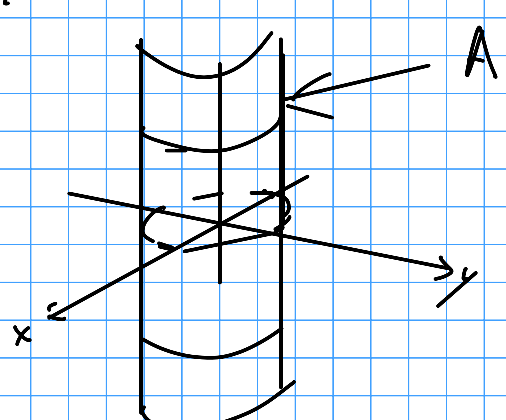
È INT. IN SENSO IMPROPRIO per Riemann



$$\left(\int_0^{+\infty} f^+ = +\infty = \int_0^{+\infty} f^- \right)$$

<u>Esercizio</u> Calcolare $\displaystyle\iiint_A \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$

$A = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1\}$



$f \geq 0$ (mis.) Posso in coordinate cilindriche

(il calcolo è lecito → può venire $+\infty$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \left(\frac{1}{\rho^2+z^2}\right)\rho = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^1 \frac{2\rho}{\rho^2+z^2}\, d\rho$$

$$= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\ln(\rho^2+z^2) \Big]_0^1 dz = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln(1+z^2) - \ln(z^2)\right) dz =$$

(nota che per $z=0$ integrando $= +\infty$, se $z \neq 0$ ...)

$$2\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{1+z^2}{z^2}\right) dz \quad \leftarrow \text{provo per parti}$$

$$= \left[2z \ln\left(\frac{1+z^2}{z^2}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2z \,\frac{z^2}{1+z^2} \cdot \left(\frac{-2}{z^3}\right) dz =$$

se $z \to 0$ il tutto $\to 0$
z vince

se $z \to \infty$ Ho

$$2z \ln\left(1+\frac{1}{z^2}\right) \simeq 2z\left(\frac{1}{z^2} + o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \to 0$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{4}{(1+z^2)}\, dz =$$

$$4 \arctan(z) \Big|_0^{+\infty} = 2\pi$$