Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 37 02/03/2020

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

~ Teoremi di scambio di limiti ?!

Prima di Natale

<u>Teorema di Lebesgue</u> Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ ho una funzione integrabile $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ e se per ogni $x \in E$ esiste $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$

Mi chiedo se (*) $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$

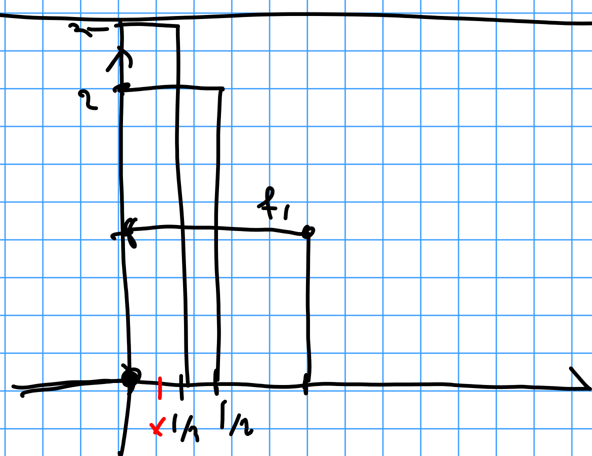
NON È SEMPRE VERO. Il Teorema di L. dice che (*) è vero se esiste una funzione integrabile $g : E \to [0, +\infty]$ tale che

$$\boxed{|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

(CONVERGENZA DOMINATA)

<u>CONTROESEMPIO</u>:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



OGNI f_n è integrabile su $[0,+\infty[$ e

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n\,dx = n\cdot\frac{1}{n} = 1$$

Se $x \in [0,+\infty[$ ho o $x=0$ (e allora $f_n(x)=0$ $\forall n$)

oppure $x>0$ e allora per n grande $x > \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x)=0$

per n grande. DUNQUE $\forall x \geq 0$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

DUNQUE

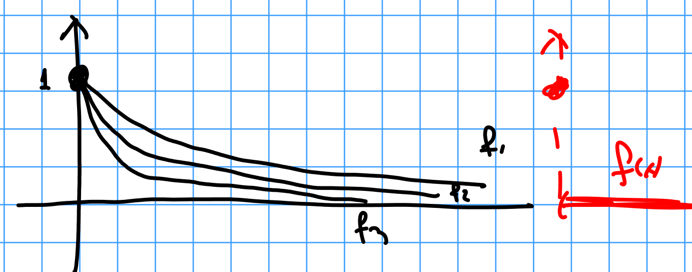
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int^{+\infty} 0\,dx = 0$$

ESEMPIO SIMILE (in cui non si possono scambiare delle "operazioni" su una successione di funzioni f_n

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definisco $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = e^{-nx}$$

$\left(f_1(x) = e^{-x},\ f_2(x) = e^{-2x},\ f_3(x) = e^{-3x} \ldots \right)$



Che succede se $n \to \infty$. Fisso $x \geq 0$ e vedo che

(1) se $x=0$ $f_n(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

(2) se $x>0$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx} = 0$

Potrei dire che $\boxed{f_n(x) \xrightarrow{\forall x \in [0,+\infty[} f(x) \text{ dove}}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$

ORA so che (FISSATO n) $\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-nx} = 1$

MENTRE $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \neq 1$ IN ALTRI TERMINI

NON È VERO CHE

$$\lim_{x \to 0^+} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to 0^+} f_n(x) \qquad (\star)$$

CHE IPOTESI POSSO CONSIDERARE (su f_n) perché $(\star)$ sia vera ?!

COMINCIAMO CON ALCUNE DEF.

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ e per ogni n è assegnata una $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ dico che (f_n) è una "SUCCESSIONE DI FUNZIONI"

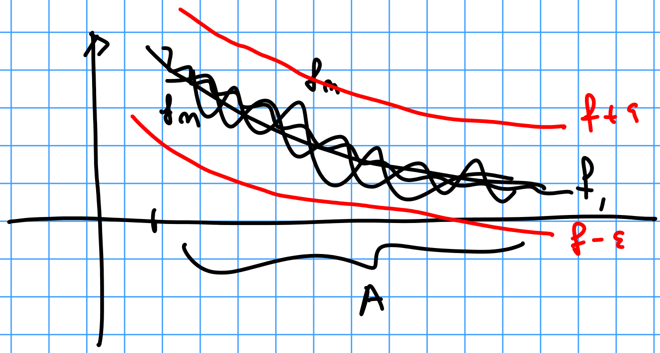
<u>Def.</u> (CONVERGENZA PUNTUALE) Data una succ. di funzioni (f_n) $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ dico che (f_n) converge puntualmente su A (o su un sottoinsieme $B \subset A$) a una funzione $f : A \to \mathbb{R}^M$ se

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in A \quad (o\ \forall x \in B)$$

(per esempio le $f_n(x) = e^{-nx}$ – definite su tutto $\mathbb{R}$ – convergono puntualmente su $[0, +\infty[$ alla funzione f definita da $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ se $x > 0$)

- COME ABBIAMO VISTO SOPRA la convergenza puntuale "<u>non va d'accordo</u>" con la <u>continuità</u>: può succedere che le f_n siano continue ma che f non lo sia!
- Non va neppure <u>d'accordo con l'integrale</u>, come visto prima

<u>DEF.</u> (convergenza uniforme)



Voglio che, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, \bar n \in \mathbb{N}$ t.c. $\underline{\forall n \geq \bar n}$

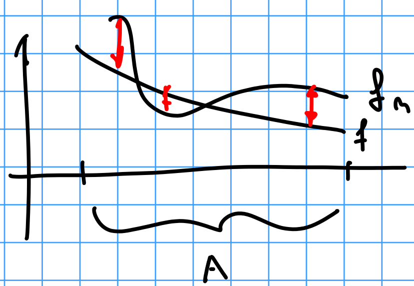
$$f_n - \varepsilon \leq f_n \leq f_n + \varepsilon \quad \text{in } A$$

$$\left(f_n(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \quad \underline{\forall x \in A} \right)$$

($\bar n$ DIPENDE <u>SOLO</u> da ε e non da x)

QUESTA DEFINIZIONE EQUIVALE A CHIEDERE

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| = 0$$



VALUTO LA MASSIMA DIFFERENZA $|f_n(x) - f(x)|$ per $x \in A$

e quello che trovo deve andare a zero per $n \to \infty$

<u>ESEMPIO</u> Nel caso $f_n(x) = e^{-nx}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

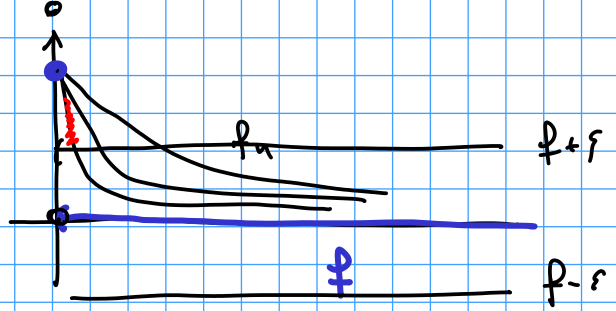
(so che $f_n \to f$ PUNTUALMENTE) HO CHE f_n NON TENDE A f UNIFORMEMENTE. IN EFFETTI $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \geq 0} \left| e^{-nx} - f(x) \right| = \sup_{x \geq 0} h_n(x) = \sup_{x > 0} e^{-nx} = 1$$

$$\left(\text{dove } h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-nx} & \end{cases} \right)$$

DUNQUE NON È VERO CHE $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = 0$

<u>NON C'È CONVERGENZA UNIFORME</u>



PROP. Se $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU A $\Longrightarrow$ $f_n \longrightarrow f$ PUNTUALMENTE SU A

(IN PARTICOLARE se $f_n \to f_1$ / $f_n \to f_2$ UNIF $\Rightarrow$ $f_1 = f_2$
LIMITE UNIF È UNICO)

IL LIMITE PUNTUALE INDIVIDUA UNIVOCAMENTE LA f a cui f_n POSSONO tendere uniformemente

TEOREMA Se $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ f_n sono tutte continue in $x_0 \in A$
$f_n \longrightarrow f$ UNIFORMENTE $\Longrightarrow$ f continua in x_0

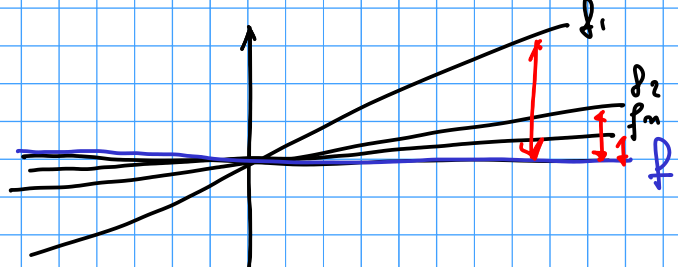
(NON LO DIMOSTRIAMO)

ALTRI ESEMPI

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \right)$$

(1) DOMANDA esiste il limite puntuale di f_n ?

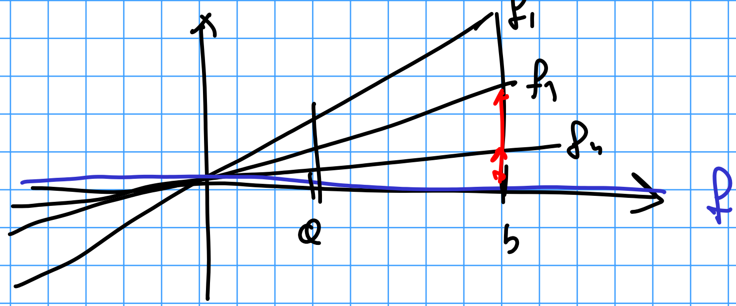
FISSO $x \in \mathbb{R}$ e vedo se $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$



(2) La convergenza di f_n a f è UNIFORME ??
PIÙ PRECISAMENTE è uniforme su $\mathbb{R}$? NO

INFATTI $\quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}\sup_{x\in\mathbb{R}} |x| = +\infty \cancel{\to 0}$

PERÒ se fisso un intervallo limitato $[a,b]$



$\Rightarrow f_n \to f$ UNIFORMEMENTE su $[a,b]$

infatti

$$\sup_{a\le x\le b} f_n(x) = \frac{1}{n}\sup_{a\le x\le b} |x| = \frac{1}{n}\max(|a|,|b|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ESEMPIO $\quad f_n(x) = n\, e^{-nx}$

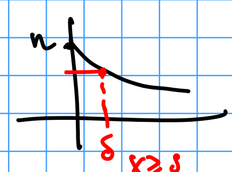
CONV. PUNTUALE $\quad f_n(x) \to +\infty$ se $x \le 0$

$f_n(x) \to 0$ se $x > 0$

MI POSSO CHIEDERE SE $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} 0$ su $]0,+\infty[$

No $\quad$ infatti $\quad \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} n\, e^{-nx} = n$

che diverge per $n \to \infty$



- PERÒ se $\delta > 0$ ho che $f_n \to 0$ UNIF. su $[\delta, +\infty[$

INFATTI $\quad \sup_{x\ge\delta} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\ge\delta} n\, e^{-nx} = n\, e^{-n\delta} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

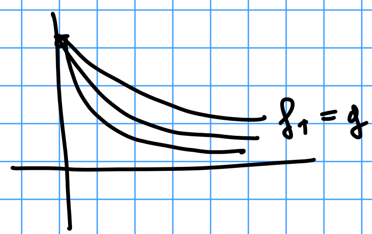
- Notiamo anche che:

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = n\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 1 \quad \left(\begin{array}{l} y = nx \\ dy = n\,dx \end{array}\right)$$

NON SI PUÒ SCAMBIARE limite con l'integrale

(dunque non si può trovare la g del Teorema di Lebesgue)

MENTRE NEL CASO $f_n(x) = e^{-nx}$, anche se non c'è convergenza uniforme, si può usare il teorema di Lebesgue. INFATTI chiamo $g(x) = e^{-x}$



$\Rightarrow \quad 0 \le f_n \le g$

$(\Rightarrow \quad |f_n| \le g \,)$

dato che g è integrabile su $[0,+\infty[$ $\Longrightarrow$

$$0 = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\,dx =$$

(perché $f(x)=0$ per q.o. $x \ge 0$)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^{+\infty} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$=$

IN QUESTO CASO SI PUÒ FARE il limite sotto il segno di integrale ANCHE senza la conv. unif.

SE PERÒ la conv. unif c'è allora ..

TEOREMA (scambio con l'integrale)

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ misurabile, $|A| < +\infty$ (misura di A finita) e $f_n : A \to \mathbb{R}$ integrabili. Se $f_n \to f$ UNIF. SU A (dove $f : A \to \mathbb{R}$) allora f è integrabile e

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,dx$$

(teorema "parallelo" a Lebesgue)

DIM. Diamo per buono che f è integrabile (si potrebbe dim. passando al modulo ..) Allora

$$\left| \int_A f(x) - \int_A f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_A (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \le$$

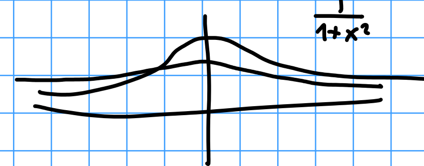
$$\int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \int_A \sup_{x\in A} |f_n(x)-f(x)|\,dx =$$

$$|A| \sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

DUNQUE $\int_A f_n(x)\,dx \to \int_A f(x)\,dx$

ATTENZIONE il teorema sopra è falso se A non ha misura finita. Per esempio

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+(x/n)^2} =$$



$$\frac{1}{n\left(\frac{n^2+x^2}{n^2}\right)} = \frac{n}{n^2+x^2} \qquad \left(\le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}\right)$$

$f_n(x)\to 0$ UNIF. perché $|f_n(x)| \le \frac{1}{n} \to 0$

MA $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{n^2+x^2}\,dx =$ $\qquad y=\frac{x}{n}\quad dy=\frac{1}{n}\,dx$, $\quad x=ny \quad dx=n\,dy$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n^2+n^2y^2}\, n\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi \ne 0$$

DEF. Se $A\subset\mathbb{R}^N$ e $f:A\to\mathbb{R}^M$ chiamo NORMA UNIFORME di f su A l'espressione

$$\sup_{x\in A}\|f(x)\|_{\mathbb{R}^M} = \|f\|_{\infty,A} \qquad (= \|f\|_\infty \text{ se } A \text{ è sottinteso})$$

(di solito f è a valori in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\|f\|_\infty = \sup_{x\in A}|f(x)|$)

Per esempio se $A=[0,1]$ e $f(x)=e^{-3x}$

$\Rightarrow \|f\|_\infty = 1$ perché $\max_{0\le x\le 1} e^{-3x} = 1$

NOTIAMO CHE $f_n \to f$ UNIF. SU A equivale a dire che

$$\| f_n - f \|_{\infty, A} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Effettivamente $\| \cdot \|_\infty$ è una norma sulle funzioni

perché:

(a) $\| f \|_\infty \geq 0$ e $\| f \|_\infty = 0 \iff f = 0$ $\left(f(x) = 0 \ \forall x \in A \right)$

OVVIO

$$\sup_{x\in A} |f(x)| = 0 \iff |f(x)| = 0 \ \forall x \in A$$

(b) $\| t f \|_\infty = |t| \, \| f \|_\infty$

(c) DIS. TRIANGOLARE. In effetti se $f, g : A \to \mathbb{R}$

$$\| f + g \|_\infty = \sup_{x\in A} \| f(x) + g(x) \|_M \leq \sup_{x \in A} \left(\| f(x) \|_M + \| g(x) \|_M \right)$$

$$\leq \sup_{x\in A} \| f(x) \|_M + \sup_{x \in A} \| g(x) \|_M$$

DUNQUE LA CONV. UNIF. È semplicemente la nozione di limite quando considero sulle funzioni la norma unif

PIÙ precisamente (se voglio evitare norme infinite)

$$\mathcal{B}(A) = \{ f : A \to \mathbb{R}^M \quad f \text{ limitata} \}$$
$$\mathcal{C}(A) = \{ f : A \to \mathbb{R}^M \quad f \text{ continua} \}$$

SI VEDE CHE ① $\mathcal{B}(A)$ è uno spazio vettoriale e $\| \ \|_\infty$ è una norma su $\mathcal{B}(A)$, e la convergenza uniforme CORRISPONDE al limite introdotto con tale norma

② Se A è limitato e chiuso

$\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{B}(A)$ (le continue sono limitate per WEIERSTRASS)

$\mathcal{C}(A)$ è chiuso in $\mathcal{B}(A)$ (rispetto a $\| \ \|_\infty$)

(limite uniforme di continue è continua)

ULTIMO TEOREMA : GENERALIZZAZIONE DEL PRECEDENTE ②

TEOREMA $\quad f_n : A \to \mathbb{R}^M \qquad A \subset \mathbb{R}^N$.

- x_0 di accumulazione per A (x_0 può anche essere infinito)
- $\forall n \ \exists \ \ell_n := \lim_{x \to x_0} f_n(x)$
- $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE IN A (con $f : A \to \mathbb{R}^M$)

$\Rightarrow$ ① $\exists \ \ell = \lim_{n \to \infty} \ell_n$ (ℓ può essere infinito)

② $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(NO DIM)

Vediamo che questo teorema $\Rightarrow$ ~~$\frac{x}{n} \to 0$ UNIF SU $\mathbb{R}$~~

Infatti se $f_n(x) = \frac{x}{n}$ tendesse a zero unif.
ne seguirebbe

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n} = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to \infty} \frac{x}{n} = +\infty$$

($x_0 = +\infty$ è di acc per $\mathbb{R}$)

NON TORNA