Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 36 18/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

PROBLEMA Dato $E \subset \mathbb{R}^N$ E misurabile, data una "successione di funzioni" $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$ è data f_n); suppongo che

① f_n integrabili su E

② per ogni $x \in E$ $\exists \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ (chiamo $f(x)$ il limite)

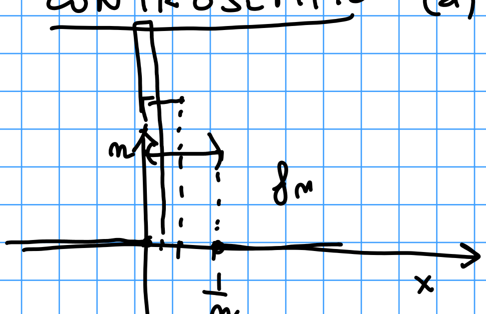
(ABBIAMO GIÀ DETTO CHE f è misurabile). POSSO DIRE che, in qualche senso

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

SE NON DICO ALTRO LA RISPOSTA È NEGATIVA.

CONTROESEMPIO (a) Prendo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 1/n \\ n & \text{se } 0 < x < 1/n \end{cases}$$



Queste funzioni f_n sono tutte integrabili: infatti (1) l'insieme $]0,1/n[$ è aperto $\Rightarrow$ è misurabile

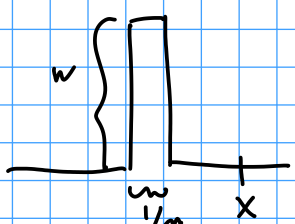
(2) La funzione che vale n $\forall x \in \mathbb{R}$ è continua $\Rightarrow$ è misurabile

(3) (Proprietà vista) da (1) e (2) $\Rightarrow$ la funzione $g(x) = n$ è misurabile su $]0,1/n[$; è chiaro che

$$\int f_n(x)\,dx = m\left\{(x,y) : 0 < x < \frac{1}{n}, \ 0 < y \le n\right\} = \text{area del rettangolo} = \boxed{n \cdot \frac{1}{n} = 1}$$

(oppure noto che f_n è integrabile secondo Riemann e $\int f = 1$)

NOTA $\int_{]0,1/n[} n = \int_{[0,1/n]} n$ perché $\{0, 1/n\}$ è trascurabile



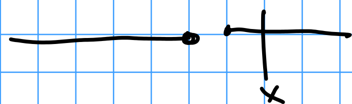
② Dico che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{f_n(x) \to 0.}$

INFATTI

- SE $x \le 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \Rightarrow f_n(x) \to 0$
- SE $x > 0$, quando prendo $n > \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{n} < x\right) \Rightarrow f_n(x) = 0$. Di nuovo $f_n(x) \to 0$

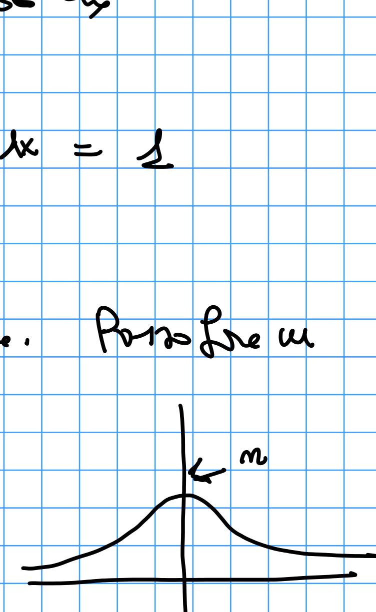
$\mapsto$ HO TROVATO UN CONTROESEMPIO dato che



$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx}_{=0} \neq \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$$

(b) In (a) ho usato delle f_n discontinue. Posso fare un altro esempio come segue:

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + (nx)^2} = \frac{n}{1 + n^2 x^2}$$



Vedo che $f_n \ge 0$ ed è continua ($\Rightarrow$ misurabile)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+(nx)^2}\,dx \qquad y = nx \qquad dy = n\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \Big[\arctan(y)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

PER OGNI n $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \pi}$. Però se fisso x

$x \neq 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{n^2}+x^2}}_{\downarrow\, \frac{1}{x^2}} = 0$

$x = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n^2\cdot 0} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$

DUNQUE $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$

Dato che $\{0\}$ ha misura nulla $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$ $\neq$

mentre $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \pi$

Per far funzionare il passaggio al limite HO BISOGNO DI ALTRE IPOTESI

TEOREMA (di Lebesgue – della convergenza dominata) $\forall n$

$f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ integrabile su $E \subset \mathbb{R}^N$ (basterebbe chiedere misurabile, POI L'INTEGRABILITÀ SEGUE...)

Esiste una $g : E \to [0, +\infty]$ integrabile su E, tale che

$(*)$ $\qquad |f_n(x)| \leq g(x) \qquad$ per q.o. $x \in E$ $\quad \forall n$

(le f_n sono "dominate" TUTTE dalla g integrabile). Inoltre

$(**)$ $\qquad$ per q.o. $x \in E$ si ha $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

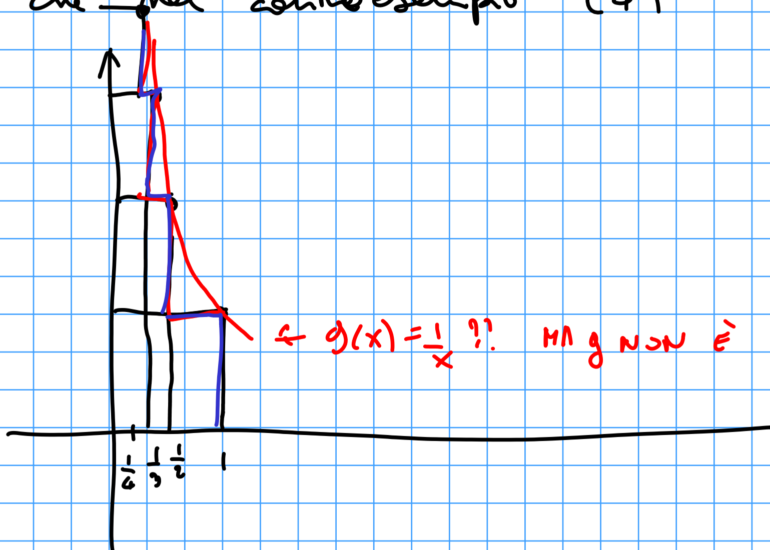
(le f_n convergono quasi ovunque a f)

ALLORA f è integrabile (è chiaro che $|f(x)| \le g(x)$ q.o. x)

E VALE

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx$$

Notiamo che nel controesempio (a) le f_n "hanno inviluppo non integrabile"



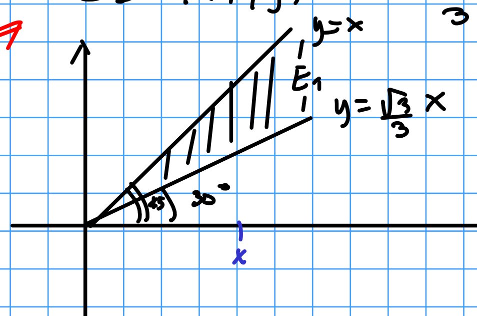
$\leftarrow g(x) = \frac{1}{x}$?! MA g NON È INTEGRABILE

VEDIAMO QUALCHE ALTRO ESEMPIO DI CALCOLO DI INTEGRALI

- TERZA VARIANTE dell'esercizio vecchio

$$f(x,y) = e^{-xy} \qquad E_1 = \{(x,y)\ 0 \le x \quad \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le x\}$$

è integrabile su E_1



Dato che $f \ge 0$ posso sempre usare Tonelli e vedere se viene con risultato finito.

f zero per $x=0$

$$\iint_{E_1} e^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\left(\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{x} e^{-xy}\,dy\right)dx =$$

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{y=x} dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x} - e^{-x}\right)dx$$

$$= \int_0^{+\infty} h(x)\,dx \qquad \text{dove} \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\sqrt3}{3}x} - e^{-x}}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Vedo che $h(x)$ è continua su $\mathbb{R}$ (perché $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$)

e inoltre $h(x) = e^{-\frac{\sqrt3}{3}x} \left(\underbrace{\dfrac{1 - e^{\frac{\sqrt3 - 3}{3}x}}{x}}_{\text{LIMITATA SU}} \right) \leq \text{cost.}\, e^{-\frac{\sqrt3}{3}x}$ INTEGRABILE A $+\infty$!!

LIMITATA SU $[0,+\infty[$ essendo continua e essendo $0 = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{(\ )x}}{x}$

$\Rightarrow \quad e^{-xy}$ è INTEGRABILE SU E_1

(b) Provo un altro giro: come ieri $x = u \quad y = \dfrac{v}{u}$

su $\{u > 0\}$ la Jacobiana della trasformazione è $\dfrac{1}{u}$

$$\Rightarrow \int_{E_1} e^{-xy}\,dx\,dy = \int_{E_1^*} e^{-xy}\,dx\,dy = \int_{F_1} \frac{e^{-v}}{u}\,du\,dv$$

$E_1^* = E \setminus \{(0,0)\}$ dove $F_1 = \left\{ u > 0 \ \ \frac{\sqrt3}{3}\frac{1}{u^2} \leq v \leq \frac{1}{u^2} \right\}$

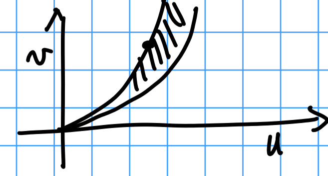
$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_{\frac{\sqrt3}{3}u^2}^{u^2} \frac{e^{-v}}{u}\,dv \right) du \qquad \frac{\sqrt3}{3}x \leq y \leq x$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} \left[-e^{-v} \right]_{v = \frac{\sqrt3}{3}u^2}^{v = u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\sqrt3}{3}u^2} - e^{-u^2}}{u}\,du$$

(STESSO INTEGRALE DI PRIMA ...)

(c) Stesso cambio di variabile, ma Tonelli nell'altro ordine.

$$= \dots = \iint_{F_1} \frac{e^{-v}}{u}\,du\,dv$$



$$= \int_0^{+\infty} \left(e^{-v} \int_{\sqrt{v}}^{\sqrt[4]{3}\sqrt{v}} \frac{du}{u} \right) dv =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} u^2 \le v \le u^2$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-v} \Big[\ln u \Big]_{u=\sqrt{v}}^{u=\sqrt[4]{3}\sqrt{v}} dv$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} u \le \sqrt{v} \le u$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-v} \left(\ln \sqrt[4]{3}\sqrt{v} - \ln \sqrt{v} \right) dv =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-v} \ln \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{v}}{\sqrt{v}}\, dv = \frac{1}{4}\ln(3) \int_0^{+\infty} e^{-v}\,dv$$

$$\frac{1}{4}\ln(3) \left[\frac{e^{-v}}{-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\ln(3)$$

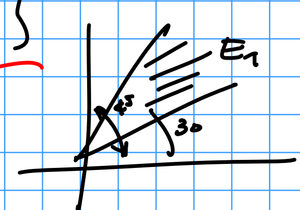
ALTRO MODO ANCORA: con le <u>coordinate polari</u>

Si usa la trasformazione $(x,y) = \Phi(\rho,\theta)$:

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$

Se voglio che l'immagine sia $E_1 = \{ x \ge 0 \ \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le x)$

devo prendere $G = \{ \rho \ge 0 \ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \}$



PER LA VERITA' CONVIENE PRENDERE

$$G = \{ \rho > 0 ,\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4} \}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(G) = \{ x > 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < x \} = E_1^* \quad \text{PERO'}$$

CAMBIO DI COORDINATE

$$\iint_{E_1} e^{-xy}\,dx\,dy = \iint_{E_1^*} e^{-xy}\,dx\,dy = \iint_G e^{-\rho^2 \sin\theta\cos\theta}\,\rho\,d\rho$$

perché $J_\Phi = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{bmatrix} \Rightarrow \det J_\Phi = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$

$$= \iint_G e^{-\frac{\sin 2\theta}{2}\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{+\infty}\rho\, e^{-\frac{\sin 2\theta}{2}\rho^2}\right)d\theta =$$

$$\left(v = \frac{\sin 2\theta}{2}\rho^2 \Rightarrow dv = \frac{\sin 2\theta}{2}\, 2\rho\, d\rho \right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2\theta}\, d\theta$$

$t = \tan\theta \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2}$

$\theta = \arctan t$

$d\theta = \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$\|$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1}\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) =$$

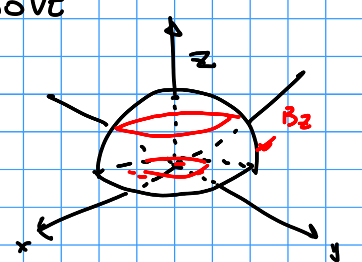
$$\frac{1}{2}\ln\sqrt{3} = \frac{1}{4}\ln(3)$$

TORNA!

ESEMPIO (lezione 5/3/2019)

$$I = \iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz \qquad \text{DOVE}$$

$$D = \{ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0 \}$$



UN POSSIBILE SVOLGIMENTO (NON IL PIÙ SEMPLICE; per quello conviene usare le "coordinate sferiche")

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2_{xy} \times \mathbb{R}_z$ $\qquad f \ge 0$ (posso usare Tonelli)

$$I = \int_{\mathbb{R}_z}\left(\iint_{B_z} \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\right) dz \qquad \text{dove}$$

$$B_z = \{ (x,y) : (x,y,z) \in D \} = \{ x^2+y^2 \le 1-z^2 \} = B\left((0,0), \sqrt{1-z^2}\right)$$

SE $0 \le z \le 1$, devo $B_z = \emptyset$ $\Rightarrow$

$$I = \int_0^1 z \left(\iint_{x^2+y^2 \le 1-z^2} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2+z^2} \right) dz =$$

$$\int_0^1 \frac{z}{1+z^2} \left(\iint_{x^2+y^2 \le 1-z^2} \frac{dx\,dy}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2} \right) dz =$$

Nell'integrale interno $(dx\,dy)$ chiamo $x' = \dfrac{x}{\sqrt{1+z^2}}$ $\quad y' = \dfrac{y}{\sqrt{1+z^2}}$

$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{1+z^2}\, x'$, $\quad y = \sqrt{1+z^2}\, y'$

$(x,y) = \Phi(x',y')$ $\qquad J_\Phi = \begin{bmatrix} \sqrt{1-z^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-z^2} \end{bmatrix} \Rightarrow |\det J_\Phi| = 1+z^2$

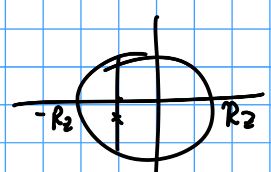
$$I = \int_0^1 \frac{z}{\cancel{1+z^2}} \iint_{(x')^2+(y')^2 \le R_z} \frac{dx'\,dy'}{1+(x')^2+(y')^2} \cancel{(1+z^2)} =$$

$$\boxed{R_z = \frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$\int_0^1 z \left(\iint_{B(0,R_z)} \frac{dx'\,dy'}{1+(x')^2+(y')^2} \right) dz = (A)\cdot(B)$$

$(x,y) = \Phi(x',y') \Rightarrow$
$dx\,dy = |J_\Phi|\, dx'\,dy'$

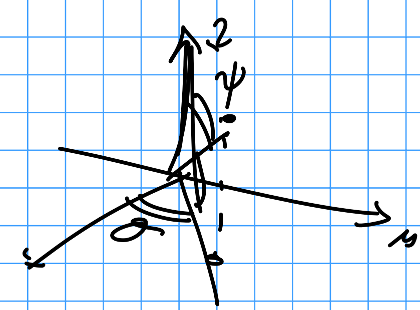
$$\int_0^1 z \left(\int_{-R_z}^{R_z} \frac{1}{1+x^2} \left(\int_{-\frac{R_z}{\sqrt{1+x^2}}}^{\frac{R_z}{\sqrt{1+x^2}}} \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} \right) dx \right) dz$$



$= \ldots$ (VEDERE SVOLGIMENTO FATTO L'ANNO SCORSO — CASOMAI LO RIPRENDIAMO)

IN OGNI CASO IL MODO MIGLIORE È USARE LE COORD SFERICHE

$x = \rho \cos\theta \sin\psi$
$y = \rho \sin\theta \sin\psi$
$z = \rho \cos\psi$



$dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\psi \; d\theta\, d\psi\, d\rho \Rightarrow$

$$I = \iiint_{\left\{\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \psi \le \pi/2 \\ 0 \le \rho \le 1 \end{array}\right\}} \frac{\rho^3 \cos\psi}{\rho^2 + 1} \, d\rho \, d\theta \, d\psi =$$

$$\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\psi \, d\psi\right)\left(\int_0^1 \frac{\rho^3}{\rho^2+1} \, d\rho\right) =$$

2π $\qquad$ 1

$$\int_0^1 \rho\left(1 - \frac{1}{\rho^2+1}\right) d\rho =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 1+\rho^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \ln(2)\right)$$

$$= \pi \left(1 - \ln(2)\right)$$