Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 35 17/12/19

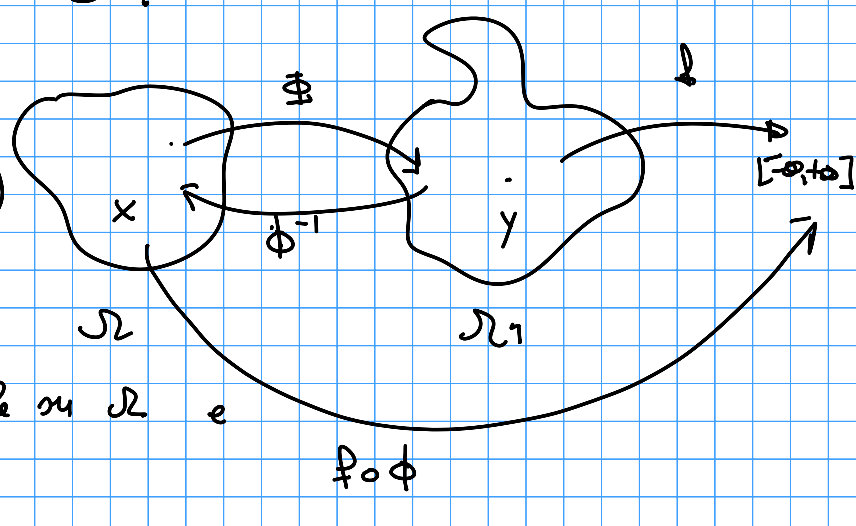
(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

TEOREMA (di cambio di variabile)

Ω_1, Ω aperti di $\mathbb{R}^N$ $\qquad f : \Omega_1 \to [-\infty, +\infty]$ misurabile su Ω_1. Inoltre abbiamo $\Phi : \Omega \to \Omega_1$

Φ bigettiva, Φ di classe C^1.

ALLORA (2 VARIANTI, UNA per $f \geq 0$, UNA PER f INTEGRAB.)



$(f \circ \phi) |\det J_\phi|$ è misurabile su Ω e

① se $f \geq 0$

$$\circledast \left\{ \int_\Omega (f \circ \phi) |\det J_\phi| \left(= \int_\Omega f(\phi(x)) |\det J_\phi(x)| dx \right) = \int_{\Omega_1} f(y)\, dy \right.$$

(VALORE $+\infty$ AMMESSO nel caso ①)

② Se f è integrabile su Ω_1 $\Rightarrow$ $f \circ \phi |\det J_\phi|$ è integrabile su Ω

e vale (*) (GLI INTEGRALI SONO FINITI)

(Nel caso N=1 ritrovo la vecchia formula $\underline{\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx}$

- qui si può fare a meno del valore assoluto, tenendo conto dell'ordine degli estremi.

$$[a,b] \xrightarrow{\phi} [c,d] \xrightarrow{f} [-\infty,+\infty]$$

se ϕ è bigettiva $\Rightarrow$ $\phi(a) = \begin{cases} c & (\phi'>0) \\ d & (\phi'<0) \end{cases}$ $\phi(b) = \begin{cases} d & (\phi'>0) \\ c & (\phi'<0) \end{cases}$

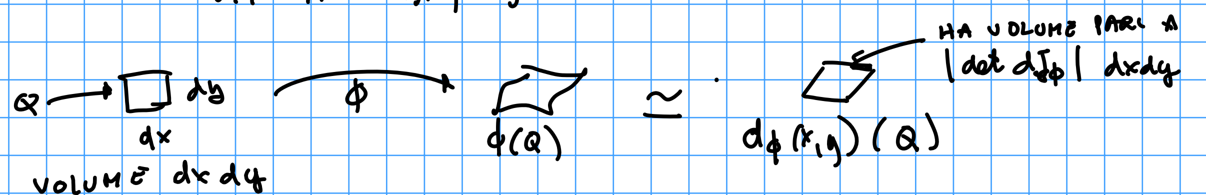
SE USO L'ENUNCIATO N-DIMENSIONALE CON N=1 TROVO

$$\int_c^d f(y)\,dy = \int_a^b f(\phi(x))\,|\phi'(x)|\,dx$$)

↑ voglio mettere c e d !!

IDEA CHE STA SOTTO LA FORMULA

$$|\det J_\phi|\, \underset{dx_1\cdots dx_N}{dx} = \underset{dy_1 dy_2\cdots dy_N}{dy} \simeq$$ ϕ TRASFORMA IL CUBETTO DI LATI INFINITESIMI $\to$

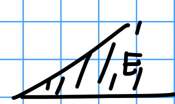


TORNIAMO ALL'ESERCIZIO DI IERI

$f(x,y) = \sin(xy)\,e^{-xy}$ $\qquad g(x,y) = e^{-xy}$

• f e g sono misurabili essendo continue

$E = \{ x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x \}$



• E misurabile (chiuso)

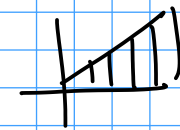
DOMANDA ORIGINALE • f è integrabile su E. DIFFICILE (Ci ritorniamo)

• Domanda più semplice: g è integrabile su E ?? $\boxed{g \geq 0}$

Posso usare Tonelli. COME VISTO IERI.

$$\iint_E e^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\Big(\underbrace{\int_0^x e^{-xy}\,dy}_{\text{VALE ZERO SE } x=0}\Big)dx = \int_0^{+\infty}\underbrace{\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^x}_{0 \text{ se } x=0} dx =$$

$$\int_0^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x^2}}{x}\right)}_{0 \text{ se } x=0}dx \qquad \boxed{\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{E_x} f(x,y)\,dy\Big)dx \quad - \; E_x = \emptyset \text{ se } x<0}$$



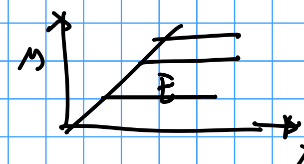
$$= \int_0^{+\infty} h(x)\,dx$$

Questo integrale è $+\infty$ dato che l'integrando $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x^2}}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ $h \geq 0$

(è continuo su $\mathbb{R}$) all'infinito è $\simeq \frac{1}{x}$ NON INTEGR.

STESSO RISULTATO INTEGRANDO NELL'ALTRO VERSO

$$\iint_E e^{-xy}\,dx\,y = \int_0^{+\infty}\Big(\int_y^{+\infty} e^{-xy}\,dx\Big)dy =$$



$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-xy}}{-y}\right]_{x=y}^{x=+\infty} dy = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-y^2}}{y}\,dy = +\infty$$

($x, y>0$ l'integrando è $+\infty$) (stavolta l'integrale diverge vicino a zero)

TERZO MODO Uso un cambio di variabile

$x = u \qquad xy = v \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = u \qquad y = \frac{v}{u}$

$\phi(u,v) = (u, v/u)$ da $\Omega = \{(u,v) : u>0\} \xrightarrow{\phi} \{(x,y)\ x>0\}$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{bmatrix} \qquad \det J_\phi = \frac{1}{u}$$

(ϕ è biiettiva - VERIFICARLO!!)

$\left(u_1, \frac{v_1}{u_1}\right) = \left(u_2, \frac{v_2}{u_2}\right) \Rightarrow$

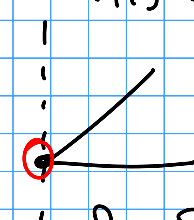
$u_1 = u_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

Applico il teorema alla funzione $\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} e^{-xy} & (x,y)\in E \\ 0 & (x,y)\in \Omega\setminus E \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_E e^{-xy}\,dx\,y = \iint_{E'} e^{-xy}\,dx\,dy = \rightarrow$$

L'INSIEME $\{0\}$ è trascurabile

$E' = E \setminus \{(0,0)\}$ (E non è tutto in Ω)



$\Omega = \{(x,y)\ x>0$

$\rightarrow \quad \displaystyle\iint_F e^{-v}\,\underbrace{\frac{1}{u}}_{\det J_\varphi}\,du\,dv = (\text{Tonelli}) \qquad F=\{(u,v): u>0\,,\ 0\le v\le u^2\}$

$0\le y\le x$

$0\le \frac{v}{u}\le u$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{u}\int_0^{u^2} e^{-v}\,dv\right)du =$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}\Big[-e^{-v}\Big]_0^{u^2}du = \int_0^{+\infty}\frac{1}{u}\,e^{-u^2}du \quad (= +\infty \text{ COME PRIMA})$$

- PROVIAMO A DIRE QUALCOSA SULL'INTEGRABILITÀ DI f

$$\Longleftrightarrow \quad \iint_E |f(x,y)|\,dx\,dy < +\infty \quad !?$$

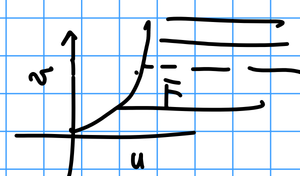
$\parallel$ uso il cambio di variabile

$$\iint_F \frac{|\sin(v)|\,e^{-v}}{u}\,du\,dv$$ F quello di prima

Uso Tonelli $\rightarrow$ integro prima in u e poi in v $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\left(|\sin(v)|e^{-v}\int_{\sqrt{v}}^{+\infty}\frac{du}{u}\right)dv =$$

$F=\{u>0,\ 0\le v\le u^2\}$



$$\int_0^{+\infty}|\sin(v)|e^{-v}\underbrace{\Big[\ln(u)\Big]_{\sqrt{v}}^{+\infty}}_{\text{PA } +\infty \ \forall v} = +\infty$$

$$= \int_0^{+\infty}(+\infty)\,|\sin(v)\,e^{-v}| = +\infty$$

perché l'integranda vale $+\infty$ eccetto i punti (NUMERABILI) in cui $\sin(v)=0$

$\Rightarrow$ f NON È INTEGRABILE

(questo ultimo esercizio è abbastanza sottile ...)

NOTA

$$\iint_E e^{-xy}\,dx\,dy = \iint_F \frac{e^{-v}}{u}\,du\,dv = \text{(altro ordine di int.)}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-v}\left(\int_{\sqrt{v}}^{+\infty} \frac{1}{u}\,du\right)dv = \int_0^{+\infty} e^{-v}\Big[\ln(u)\Big]_{\sqrt{v}}^{+\infty} dv =$$

$$\int_0^{+\infty} (+\infty)\,e^{-v}\,dv = +\infty \quad \text{(l'integrando è sempre } +\infty\text{)}$$