Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 34 16/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

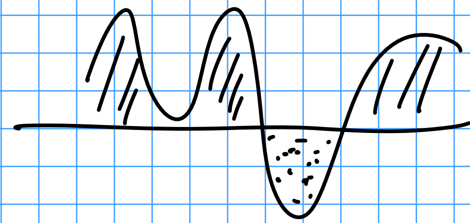
LA VOLTA SCORSA ABBIAMO

- Definito una classe di insiemi in $\mathbb{R}^N$, detti misurabili, indicati con $\mathcal{M}$: se $E \subset \mathcal{M}$ è definita la misura di $E$
$$m(E) = m_N(E) = |E|$$
che è un numero $\geq 0$, anche $+\infty$.
(La misura si ottiene mediante un'approssimazione con unioni numerabili di rettangoli)
Questa classe $\mathcal{M}$ contiene:
  - I Rettangoli (e se $R$ è un rettangolo, $R = I_1 \times \dots \times I_N$ e ogni $I_j$ ha estremi $a_j \leq b_j$ $\Rightarrow$ $|R| = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_N - a_N)$ con la convenzione $0 \cdot +\infty = 0$; $a \cdot +\infty = +\infty$ se $a > 0$.
  - gli aperti e i chiusi.
  - gli insiemi misurabili secondo Peano-Riemann; in questo caso la misura detta sopra coincide con la misura di Peano.

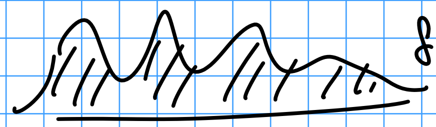
INOLTRE CI SONO VARI TEOREMI SULLE PROPRIETÀ DELLA MISURA (MONOTONIA, ADDITIVITÀ NUMERABILE, MISURA E LIMITI).

- Definito le funzioni misurabili: quelle che hanno "sottografico"

misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$
(nel caso $f \geq 0$, se no si usano $f^+$ e $f^-$)



· Se $f$ è misurabile $f \geq 0$ $\Rightarrow$ $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = m(\text{sottografico di } f)$



PUÒ ESSERE $+\infty$

· Se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$, $f$ misurabile, dico che è integrabile quando $f^+$ e $f^-$ hanno integrale $< +\infty$.
Pongo
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx \quad (\in \mathbb{R})$$

· Se $E \subset \mathbb{R}^N$ $f : E \to [-\infty, +\infty]$ dico che $f$ è misurabile su $E$ (integrabile su $E$) se la funzione
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$
è misurabile (integrabile) su $\mathbb{R}^N$

e pongo $\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)\,dx$ (QUANDO HA SENSO)

---

## PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ MISURABILI su $E$

(a) Se $f \geq g \geq 0$ $\Rightarrow$ (MONOTONIA)

$$+\infty \geq \int_E f(x)\,dx \geq \int_E g(x)\,dx$$

se tolgo $\geq 0$ la proprietà vale, ma devo aggiungere $f, g$ integrabili (in questo caso $+\infty > \dots$)

(b) (LINEARITÀ) (b.1) Se $f \geq 0$ $g \geq 0$ $\lambda, \mu \geq 0$ allora

$\lambda f + \mu g$ è misurabile e $\int_E (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_E f + \mu \int_E g$

(solita convenzione $0 \cdot +\infty = 0$ $a \cdot +\infty = +\infty$ se $a > 0$, $+\infty + a = +\infty$)

(b.2) Se $f, g$ sono integrabili ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), OSSERVO CHE, dalla (c) $\exists$, $\Rightarrow$ $E_0 = \{x \in E : |f(x)| = +\infty, |g(x)| = +\infty\}$ è trascurabile.

ALLORA, IN QUALUNQUE MODO IO DEFINISCA $\lambda f(x) + \mu g(x)$ per le $x$ di $E_0$ (per esempio zero)

$\Rightarrow$ $\lambda f + \mu g$ è misurabile, integrabile e

$$\int_E (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_E f + \mu \int_E g$$

(c.1) Se $f$ è integrabile su $E$ $\Rightarrow$ $\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$ è un insieme trascurabile; cioè $m(\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}) = 0$

(d) Se $E$ è misurabile e $f$ è misurabile su $\mathbb{R}^N$ $\Rightarrow$ $f$ è misurabile su $E$

(e) Se $E$ è trascurabile $\Rightarrow$ $\int_E f = 0$ $\left(= \int_E f(x)\,dx\right)$

(f) Se $f \geq 0$ e se $\int_E f(x)\,dx = 0$ $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ per quasi ogni $x$ $\simeq$ $f = 0$ quasi ovunque $\simeq$ $\{x : f(x) \neq 0\}$ ha misura nulla

(per esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ non è razionale} \end{cases}$ $\Rightarrow f \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 0$)

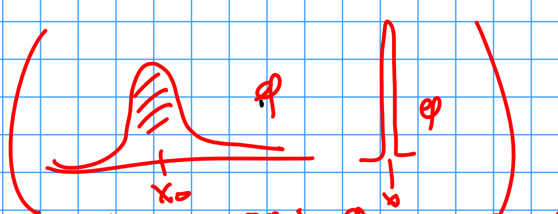
(g) Se $f$ è integrabile su $\Omega$ aperto e se

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$$

($\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabile) ALLORA

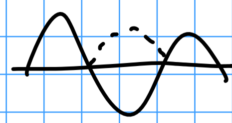
$$f(x) = 0 \quad \text{per q.o. } x$$

quasi ogni




IDEA: a ogni $\varphi$ CORRISPONDE UNA MISURAZIONE SU $f$

(h) $f$ è integrabile su $E$ $\Leftrightarrow$ $|f|$ integrabile su $E$ (è proprio la definizione) inoltre $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$



(i) Se $(f_n)$ è una successione di funzioni misurabili su $E$ ($f_n : E \to [-\infty, \infty]$) e se esiste il limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{per quasi ogni } x$$

ALLORA $f$ è misurabile

(Poi vedremo se per caso $\int_E f_n \to \int_E f$ !?)

**DEF** (CASO VETTORIALE) Se $E \subset \mathbb{R}^N$ $f : E \to \mathbb{R}^M$ (niente infiniti)

Dico che $f$ è misurabile (integrabile) su $E$ se ogni componente $f_1 \dots f_M$ è misurabile (integrabile) su E

Se $f$ è integrabile su $E$ pongo

$$\int_E f(x)\,dx = \left(\int_E f_1(x)\,dx, \dots, \int_E f_M(x)\,dx\right)$$

Vale la proprietà $\left\| \int_E f(x)\,dx \right\|_{\mathbb{R}^M} \leq \int_E \|f(x)\|_{\mathbb{R}^M}\,dx$

e da questo si ricava

$f$ integrabile $\underbrace{(\Leftrightarrow |f_i| \text{ integrabile } \Leftrightarrow)}$ $\|f\|$ integrabile

Per esempio, in questo modo ha senso calcolare $\int_E f(x)\,dx \in \mathbb{C}$ se $f : E \to \mathbb{C}$. ($\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$)

$$= \int_E \mathrm{Re}\, f(x)\,dx + i \int_E \mathrm{Im}\, f(x)\,dx$$

Altre proprietà, continuando da prima,

(h) Se $f$ è misurabile e $g = f$ quasi ovunque $\Rightarrow$ $g$ è misurabile. Se $f \geq 0$, $g \geq 0$ $\Rightarrow$ $\int f = \int g$

Se $f$ è integrabile e $g = f$ quasi ovunque $\Rightarrow$ $g$ è integrabile e $\int f = \int g$

(k) Se $0 \leq f \leq g$ ($f, g$ misurabili su $E$). ALLORA $g$ INTEGRABILE $\Rightarrow$ $f$ INTEGRABILE.

**TEOREMA A**. Se $f$ è continua $\Rightarrow$ $f$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$

. Se $f$ è continua su $\mathbb{R}^N$, $E$ misurabile $\Rightarrow$ $f$ è integrabile su $E$

CI TORNIAMO

**INTEGRALI ITERATI**: (Calcolare un integrale in $N$ variabili riconducendoci a $N$-integrali unidimensionali)

CI SONO DUE VERSIONI DI UN TEOREMA: ABBIAMO

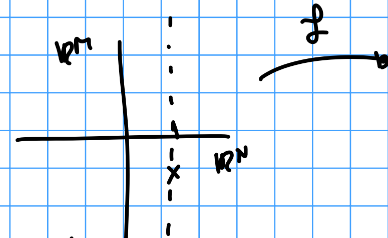
$f : \mathbb{R}^{N+M} \to [-\infty, +\infty]$. CONVENIAMO DI SCRIVERE

$f = f(x, y)$ $\quad x \in \mathbb{R}^N \quad y \in \mathbb{R}^M$.

**TEOREMA 1** (TONELLI) Se $f$ è misurabile su $\mathbb{R}^{N+M}$ e $f \geq 0$

($f : \mathbb{R}^{N+M} \to [0, +\infty]$) ALLORA:

(1) Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, la funzione $y \to f(x, y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^M$




PER QUASI OGNI $x$

DUNQUE RISULTA DEFINITA LA FUNZIONE

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)\, dy \in [0, +\infty],$$

(2) Se definisco come mi pare la $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$

(PER ESEMPIO $+\infty$)

nelle $x$ in cui l'integrale non ha senso $\Rightarrow$ questa funzione è misurabile su $\mathbb{R}^N$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy}_{\text{definito come mi pare dove non ha senso - punto 2}}\Big)\,dx = \iint_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy$$

<u>ATTENZIONE</u> • LA FORMULA VALE ANCHE CON VALORE $+\infty$

• Ne deduco che, se $f$ è misurabile, $f \geq 0$,

$$([0,+\infty]\ni)\ \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^M}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \dots$$

<u>DUNQUE</u> $$\int_{\mathbb{R}^N} f(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\,dx_2\dots dx_N = \underbrace{\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_N)\,dx_N\Big)dx_{N-1}\dots\Big)dx_1}$$

Tonelli $\rightarrow$ funzioni misurabili, $\geq 0$. Vale anche con $+\infty$

<u>Teorema 2 (FUBINI)</u> $f:\mathbb{R}^{N+M}\to[-\infty,+\infty]$ <u>INTEGRABILE</u>.

Allora:

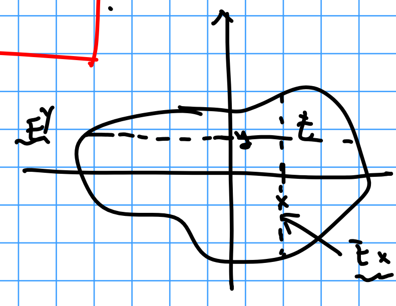
(1) Per quasi ogni $x$ la funzione $y\mapsto f(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^M$.

(2) La funzione $x\mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$ (definita come mi pare nelle $x$ in cui (1) è falso!), È INTEGRABILE su $\mathbb{R}^N$

(3) $$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \int_{\mathbb{R}^{N+M}} f(x,y)\,dx\,dy \quad (\in\mathbb{R})$$

VARIANTI / CONSEGUENZE: caso $f$ su $\boxed{E\subset\mathbb{R}^{N+M}}$.

<u>NOTAZIONE</u>




Se $x\in\mathbb{R}^N$ $E_x = \{y\in\mathbb{R}^M : (x,y)\in E\}$

Se $y\in\mathbb{R}^M$ $E^y=\{x\in\mathbb{R}^N : (x,y)\in E\}$

**VARIANTI** Se $f : E \to [-\infty, +\infty]$ misurabile su $E$.

Se $f \geq 0$ ($f$ integrabile) $\Rightarrow$

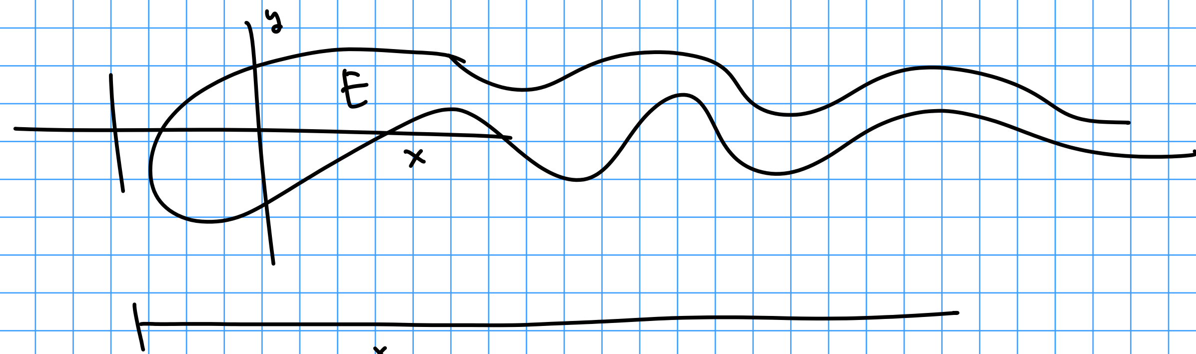
(1) per q.o. $x \in \mathbb{R}^N \Rightarrow y \to f(x,y)$ è misurabile (integrab.) su $E_x$ (se $E_x = \emptyset$ NIENTE DA DIRE)

(2) la funzione $x \to \int_{E_x} f(x,y)\,dy$ (messa a piacere dove non vale la tesi (1) e avente valore NULLO se $E_x = \emptyset$) È MISURABILE (INTEGRABILE)

(3) VALE

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{E_x} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_E f(x,y)\,dx\,dy$$

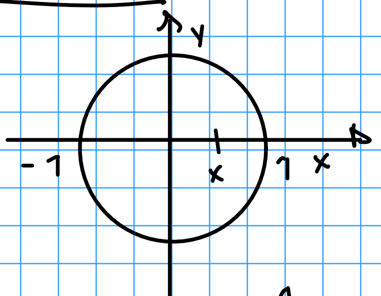
qui si può mettere $\{x : E_x \neq \emptyset\}$




**CASO PARTICOLARE** $E \subset \mathbb{R}^{N+M}$, MISURABILE $\Rightarrow$

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)\,dx$$

**ESEMPIO** TROVIAMO L'AREA DEL CERCHIO $D = D(0,1) = \{x^2+y^2 \leq 1\}$



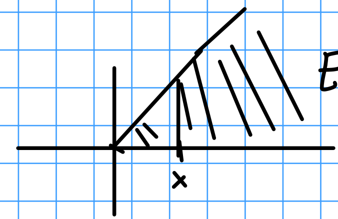

Se $x \in \mathbb{R}$ $D_x = \begin{cases} [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}] & \text{se } |x| \leq 1 \\ \emptyset & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow |D| = \int_{\mathbb{R}^N} |D_x|\,dx = \int_{-1}^{1} |D_x|\,dx =$$

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx .$$ Uso $x = \sin(t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $dx = \cos(t)\,dt$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos(t)\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt =$$

$$2\int_0^{\pi/2} (1+\cos(2t))\,dt = 2\left[t + \underbrace{\frac{\sin(2t)}{2}}_{\text{MI DÀ ZERO}}\right]_0^{\pi/2} = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi$$




**DOMANDA** ? $\sin(xy)\,e^{-xy}$ è integrabile su $E$

$E = \{x \geq 0 \quad 0 \leq y \leq x\}$ (NON È RICHIESTO IL CALCOLO DELL'INT.)

① $f$ è integrabile $\Leftrightarrow$ $|f|$ è integrabile $\Leftrightarrow$ $|xy|e^{-xy}$ INTEGR.

② Dato che $|\sin(t)| \leq 1 \Rightarrow |f| \leq e^{-xy} =: g(x,y)$

③ Basta vedere se $g$ è integrabile su $E$

Nota: se $f$ che $g$ sono misurabili in quanto CONTINUE

Posso applicare Tonelli: $\displaystyle\iint_E e^{-xy}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{E_x} e^{-xy}\,dy\right)dx =$

$\left(E_x = \begin{cases}[0,x] & \text{se } x \geq 0 \\ \emptyset & \text{se } x<0\end{cases}\right)$ . $\displaystyle = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^x e^{-xy}\,dy\right)dx =$

SE X=0 L'INTEGRANDA VALE 0

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(1-e^{-x^2}\right)dx \quad \leftarrow \text{INTEGRABILE ??}$$

0 IN X=0

SÌ perché l'integranda $\boxed{h(x) = \frac{1-e^{-x^2}}{x}}$ è continua anche in $x=0$

$h(0)=0$

(tende a zero quando $x \to 0$). DUNQUE $h(x)$ è continua in $x=0$ e $h(x) \to 0$ MOLTO RAPIDAMENTE SE $x \to +\infty$.

NO VA AGGIUSTATO :(

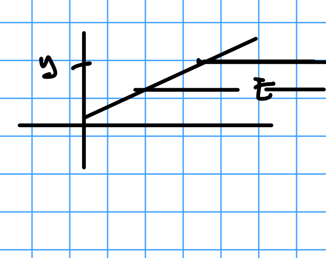
$h(x) \simeq \frac{1}{x}$ NON INTEGR.

---

AVREI POTUTO ANCHE INTEGRARE NELL'ALTRO ORDINE

$$\iint_E e^{-xy}\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{E^y} e^{-xy}\,dx\right)dy$$

$\downarrow$




$E^y = \begin{cases}[y,+\infty[ & \text{se } y \geq 0 \\ \emptyset & \text{se } y<0\end{cases}$

$\longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} \left( \qquad \qquad \right) dy$

LO RIPRENDIAMO DOMANI

NON TORNA

$g = e^{-xy}$ NON E' INT. SU E

SU $f$ NON SI RIESCE A DIRE MOLTO (COMPLICATO ...)