Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 33 11/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

INTEGRALI IN PIÙ VARIABILI

Problema: Calcolare l'area / volume di una regione del piano / dello spazio. PIÙ IN GENERALE DATO UN INSIEME $E \subset \mathbb{R}^N$ vorrei definire la MISURA di E ? $m(E)$?

COSA VOGLIO DA QUESTA MISURA ?!

VORREI

⓪ Se $E \subset \mathbb{R}^N$ $m(E)$ è un numero ≥ 0, PUÒ ANCHE ESSERE $+\infty$

① $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$

② SE $A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

una m con tali proprietà è una "misura" GENERALE

③ Se R è un "RETTANGOLO" N DIMENSIONALE, CIOÈ se $R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$ dove I_j è un intervallo in $\mathbb{R}$ di estremi $a_j < b_j$ j

$$|R| = m_N(R) = m_1(I_1) \cdot m_1(I_2) \cdots m_1(I_N)$$ e

$$m_1(I) = b - a$$ se I ha estremi $a < b$.

[SE R è illimitato INTENDO CHE IL PRODOTTO SCRITTO SOPRA FA 0 se uno degli I_j ha misura 0, se no FA $+\infty$] ⊗

(Se $E = \{(x,y,z) : 1 \le x < 5,\ 0 \le y \le 2,\ -1 \le z < 2\}$

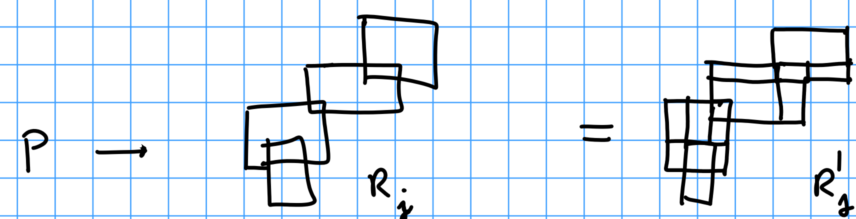
$m(E) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$)

QUESTI SONO I REQUISITI CHE VOGLIO DALLA MISURA N-DIMENSIONALE.

PRIMA IDEA (a) Diciamo prima di tutto che $P \subset \mathbb{R}^N$ è un "plurirettangolo finito" se

$$P = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_k$$

dove $R_1 \dots R_k$ sono dei rettangoli LIMITATI di $\mathbb{R}^N$



FATTO Se P è un plurirettangolo posso trovare $R_1' \dots R_h'$ rettangoli in $\mathbb{R}^N$ tali che

$$\mathring{R}_i' \cap \mathring{R}_j' = \emptyset \quad \text{e} \quad P = \bigcup_{j=1}^{h} R_j'$$

Posso definire la misura di P

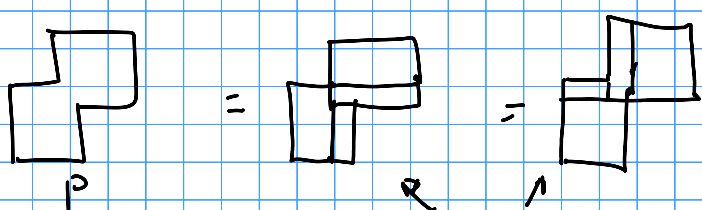
$$\boxed{|P| = |R_1'| + |R_2'| + \dots + |R_h'|}$$

PERCHÉ VALE ANCHE LA PROPRIETÀ

Se $P = R_1' \cup \dots \cup R_h' = R_1'' \cup \dots \cup R_\ell''$

($\mathring{R}_j'$ disgiunti, $\mathring{R}_j''$ disgiunti), ALLORA

$$|R_1'| + \dots + |R_h'| = |R_1''| + \dots + |R_\ell''|$$

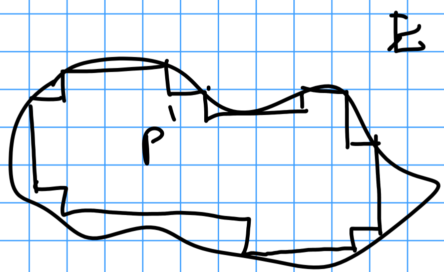


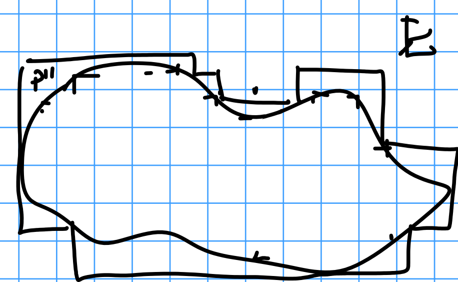
Le somme delle aree dei rettangoli componenti è lo stesso

(b) Dato un $E \subset \mathbb{R}^N$ <u>LIMITATO</u> posso considerare due numeri:

$$m_{*,P}(E) = \sup \{ |P'| : P' \text{ plurirettangolo},\ P' \subset E \}$$ (MISURA INTERNA SECONDO PEANO - RIEMANN)

$$m^*_P(E) = \inf \{ |P''| : P'' \text{ plurirettangolo},\ E \subset P'' \}$$
(MISURA ESTERNA ...)





- SI VEDE FACILMENTE CHE $\forall E \subset \mathbb{R}^N$ LIMITATO
$$0 \leq m_{P*}(E) \leq m^*_P(E) < +\infty$$

- NON E' DETTO CHE COINCIDANO.

Ad esempio se sono in $\mathbb{R}$ e prendo

$$E = \{ x \in [0,1],\ x \text{ razionale} \}$$
si vede che
$$P' \subset E,\ P' \text{ plurirett.} \Rightarrow P' = \{\text{punti}\} \Rightarrow |P'| = 0$$
$$P'' \supset E \Rightarrow P'' \supset [0,1] \Rightarrow |P''| \geq 1$$

$$\Rightarrow m_{*P}(E) = 0 \neq m^*_P(E) = 1$$

<u>DEF.</u> DICO CHE E è misurabile secondo PEANO (RIEMANN) se $m^*_P(E) = m_{*,P}(E)$ e in tal caso chiamo "Misura di Peano-Riemann" $m_P(E) = m^*_P(E) = m_{*,P}(E)$

CI SONO DELLE BUONE PROPRIETÀ PER m_p.

- Se A e B sono mis $\Rightarrow$ $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ sono mis.

  e se $A \cap B = \emptyset$ $\Rightarrow$ $m_p(A \cup B) = m_p(A) + m_p(B)$

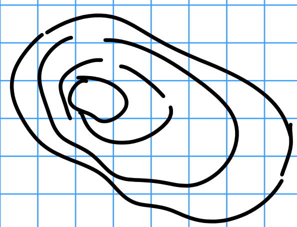
PERÒ (purtroppo) in <u>Analisi si fanno i limiti</u>.

Perché la nozione di misura vada d'accordo coi limiti

MI SERVIREBBERO le proprietà:

(1) Se A_n sono misurabili, $A_n \subset A_{n+1}$

e chiamo $A = \bigcup_n A_n$



$\underset{\text{(VORREI)}}{\Rightarrow}$ A misurabile e $|A| = \lim_{n \to \infty} |A_n|$

(2) Se A_n sono misurabili e $A_n \cap A_m = \emptyset$

allora $A = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è misurabile

e $|A| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$

(3) Se A_n sono misurabili e $A_{n+1} \subset A_n$ allora

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ è misurabile e $|A| = \lim_{n \to \infty} |A_n|$

QUESTE PROPRIETÀ NON SONO VERE PER m_p

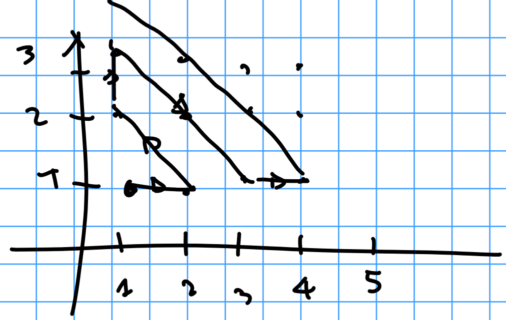
IN EFFETTI RICORDIAMO (proprietà dei razionali)

$\mathbb{Q}$ = {numeri razionali} È NUMERABILE, CIOÈ

esiste una successione $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$\forall n \; q_n \in \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$

IDEA



CONTO TUTTE LE COPPIE $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ "CONTO" i razionali

DUNQUE $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ e $|\{q_n\}| = 0$

(Se E contiene un solo punto $\Rightarrow$ E mis. e $|E| = 0$)

MA $E = \{x \in [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}$ non è misurabile, come visto prima pur essendo E = unione dei $\{q_n\}$ con $q_n \in E$ (è una sottosuccessione di quella che copre $\mathbb{Q}$)

E È UNIONE NUMERABILE DI INSIEMI DI MIS. NULLA ma LUI NON È MISURABILE

DEVO TROVARE UNA NOZIONE DI MISURA "MIGLIORE"

$\rightsquigarrow$ DEVO prendere una classe più ampia di insiemi misurabili E e definire su questi una misura $m(E)$ tale che se E è misurabile secondo Peano lo è anche nel mio nuovo e le misure coincidono

---

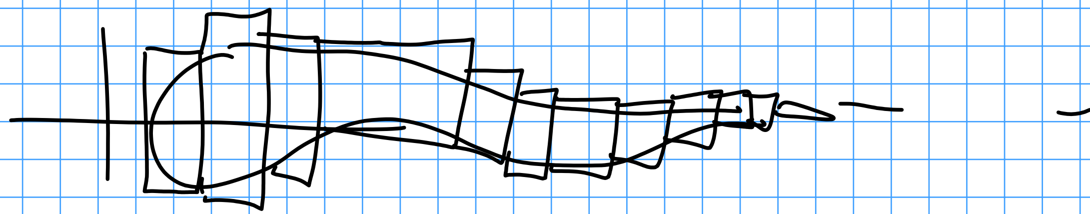
SI PARTE DA UNA MISURA ESTERNA CHE DI PER SE USA PLURIRETTANGOLI INFINITI.

<u>Def.</u> SIA $E \subset \mathbb{R}^N$ (NON CHIEDO CHE SIA LIMITATO)

PONGO

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| \text{ dove } R_i \text{ rettangolo, } i \in \mathbb{N}, \; E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\}$$

Misura esterna secondo Lebesgue di E



$m^*(E) \in [0, +\infty]$

(NON DEFINISCO UNA MISURA INTERNA ..)

- MI CHIEDO SE m^* sia additivo cioè'

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) \text{ se } A \cap B = \emptyset$$

FALSO

- Devo INVENTARMI UNA CLASSE $\mathcal{M}$ di insiemi (detti misurabili) su cui valgono le proprietà che mi interessano

DEF. DICO che $A \subset \mathbb{R}^N$ è MISURABILE $(A \in \mathcal{M})$ se $\forall E \subset \mathbb{R}^N$

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A)$$

(A "SPACCA" bene tutti gli $E \subset \mathbb{R}^N$)

SE $A \subset \mathcal{M}$ scrivo $m(A) = |A| = m_N(A)$ invece di $m^*(A)$ (misura di Lebesgue di A)

Se uso questa definizione riesco a dim. UN ~~...~~ PO' DI PROPRIETÀ

PROPRIETÀ

- Se A_m $(m \in \mathbb{N})$ sono misurabili $\Rightarrow$

$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ sono misurabili

- Se $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$ $\left(A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\} \right)$ differenza tra A e B

- Se $A_m \in \mathcal{M}$ e $A_m \cap A_m \neq \emptyset \Rightarrow$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

- Se $A_n \in \mathcal{M}$ $\quad A_n \subset A_{n+1} \implies$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} m(A_n) \qquad \left(m(A_n) \text{ crescono con } n \right)$$

- Se $A_n \in \mathcal{M}$ e $A_{n+1} \subset A_n$ e $m(A_1) < +\infty \implies$

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} m(A_n) \qquad \left(m(A_n) \text{ decrescono con } n \right)$$

- Se A è (A LIMITATO) misurabile secondo Peano $\implies A \in \mathcal{M}$ e $m(A) = m_P(A)$

IN PARTICOLARE se R è un rettangolo $\Rightarrow R \in \mathcal{M}$ e $m(R) = |R|$

- Se $A \subset B$ sono misurabili $\quad m(A) \leq m(B)$

ESEMPIO $E = \{x \in [0,1] : x \in \mathbb{Q}\}$ è misurabile e $m(E) = 0$.

ANZI $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ e $m(\mathbb{Q}) = 0$ $\left(\text{in } \mathbb{R} = \mathbb{R}^1\right)$
per il solo fatto che $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$
e ogni $\{q_n\}$ ha misura nulla.

Questi insiemi non sono misurabili per Peano.

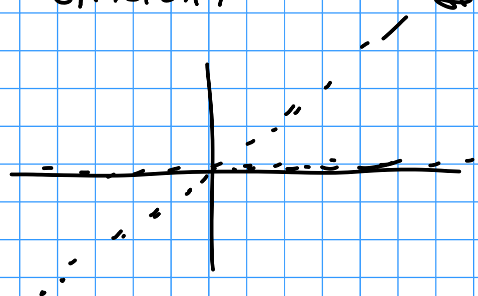
Def. Dico che $E \subset \mathbb{R}^N$ è trascurabile se
$m^*(E) = 0$

FATTO Se $m^*(E) = 0 \implies E$ è misurabile
(dunque $m^*(E) = m(E)$)

DEF. DIREMO CHE UNA PROPRIETÀ $\mathcal{P}(x)$ (definita sulle $x \in \mathbb{R}^N$) VALE QUASI OVUNQUE se $\{x : \mathcal{P}(x) \text{ NON VALE}\}$ è TRASCURABILE

Per esempio. $f(x) = \sin(x)$ è diversa da zero quasi ovunque. INFATTI $\{x : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \leftarrow$ TRASCURABILE IN QUANTO UNIONE NUMERABILE DI PUNTI

- PIÙ COMPLICATO: Sia $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$



ALLORA $f(x) = x$ quasi ovunque

Def. (INTEGRALE) Sia $f : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty]$

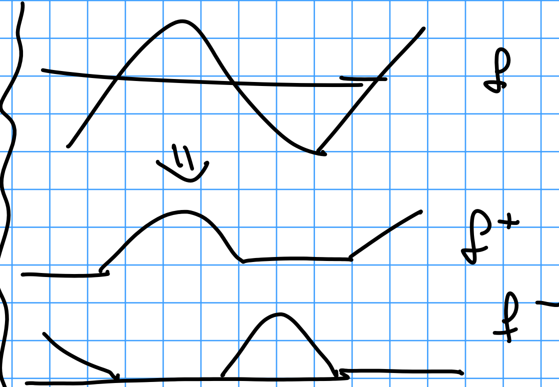
- Dico che f è misurabile se il SOTTOGRAFICO (EPIGRAFICO)
$$Epi(f) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^N \quad 0 \le y \le f(x)\}$$
è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$

- Se f è come sopra, chiamo INTEGRALE DI f su $\mathbb{R}^N$ il numero
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := m_{N+1}(Epi(f)) = m_{N+1}\{(x,y) : x \in \mathbb{R}^N, 0 \le y \le f(x)\}$$
$$\in [0, +\infty]$$

Le funzioni misurabili positive hanno sempre integrale (~~su $\mathbb{R}^N$~~) – eventualmente $+\infty$.

• Se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ dico che è misurabile se $|f|$ è misurabile $\iff$ f^+ e f^- sono misurabili

$$\left(\begin{array}{l} f^+ = \max(0, f) \\ f^- = (-f)^+ \end{array} \right.$$



$\Rightarrow$ $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

• Se $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ dico che f è integrabile se f è misurabile e se $\int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx < +\infty$, $\int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx < +\infty$

SE QUESTO AVVIENE PONGO

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^-(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

(le funzioni a segno variabile hanno integrale $\iff$ hanno integrali finiti $\iff$ sono integrabili)

• Se $f : E \to [-\infty, +\infty]$ dico che f è misurabile (integrabile) su E se la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$ def. da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

è misurabile (integrabile) su $\mathbb{R}^N$. Pongo inoltre

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(x)\,dx \qquad \text{(quando ha senso)}$$

<u>Per esempio</u> se $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$\Rightarrow$ $(f \geq 0)$ f è misurabile e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$

<u>TEOREMA</u> (a) Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo

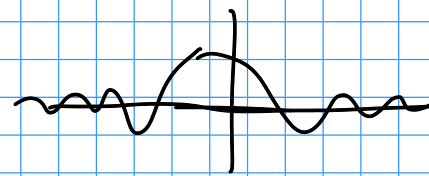
Riemann $\Rightarrow$ f è integrabile e gli integrali sono gli stessi

(b) Se $f : I \to \mathbb{R}$ I intervallo di $\mathbb{R}$ (anche non limitato)

f assolutamente integrabile in senso improprio

$\Rightarrow$ f è integrabile e l'integrale coincide con l'integrale improprio

<u>OSS.</u> Non è vero che l'integrale di Lebesgue coincide con l'integrale improprio (secondo Riemann) nel caso in cui f NON È ASSOLUTAMENTE INT.

Per es $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $x \in \mathbb{R}$ 

ha integrale improprio finito (Riemann)

ma $\int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,dx = \int f^-(x)\,dx = +\infty$ $\Rightarrow$ NON È INTEGRABILE PER LEBESGUE