Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 32 10/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Def. Chiameremo DOMINIO REGOLARE un INSIEME $D \subset \mathbb{R}^N$ tale che $\exists\ G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe C^1 per cui

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) \le 0 \}$$

e $\nabla G(x) \ne \vec{0}$ se $G(x) = 0$

NOTA Allora $\partial D = \{ G(x) = 0 \}$. D è CHIUSO

- Analogamente chiamo DOMINIO APERTO l'INSIEME $\Omega = \{ G(x) < 0 \}$ con G come sopra. Ω è aperto e $\partial\Omega = \{ G = 0 \}$.

Esempio $D = \{ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \} = \overline{B(0,1)}$ è un dom regolare e $\partial D = S(0,1) = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ (in $\mathbb{R}^3$)

Def. Dico che D è un DOMINIO REGOLARE A TRATTI se $\exists\ G_1 \dots G_K$ di classe C^1 da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$ tali che

$$D = \{ x \in \mathbb{R}^N : G_1(x) \le 0, \dots, G_K(x) \le 0 \}$$

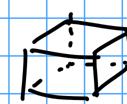
e si ha: se $i_1 \dots i_r \in \{1, \dots, K\}$ e $G_{i_1}(x) = \dots = G_{i_r}(x) = 0$

ALLORA $\nabla G_{i_1}(x) \cdots \nabla G_{i_r}(x)$ sono linearmente indipendenti
(in particolare sono $\neq \vec{0}$)

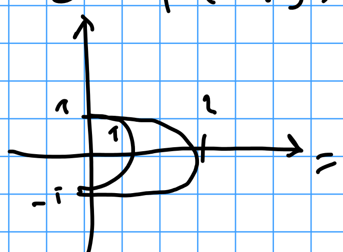
(DUNQUE D è intersezione di $D_1 \cdots D_K$ dove
$D_i = \{ x \in \mathbb{R}^N , G_i(x) \leq 0 \}$ che è un DOM. REG.

e in più i "D_i si intersecano bene")

<u>Per esempio</u> $Q = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \}$
è un dominio regolare a tratti.



<u>Controesempio</u> $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 , x^2+4y^2 \leq 4 , x \geq 0 \}$



$=$ NON È REG A TRATTI.

$G_1(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ $\qquad$ $G_2(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$

$\nabla G_1(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla G_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$

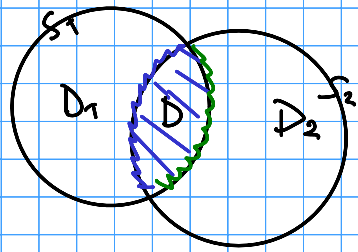
$\nabla G_1(x,y) \neq 0$, $\nabla G_2(x,y) \neq 0$ se $(x,y) \in \partial D$

<u>MA</u> nei punti $(0, \pm 1)$ i due gradienti son lin. dipendent.

infatti $\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\nabla G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 8 \end{pmatrix}$

e $\nabla G_1 = \lambda \nabla G_2$ per un opportuno λ

<u>OSS.</u> Se $D = \{ G_1 \leq 0 \cdots G_K \leq 0 \}$
come sopra, allora
$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{K} \{ G_i(x) = 0 \}$$
(si ricava dalla formula $\partial A \cap B = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B)$)

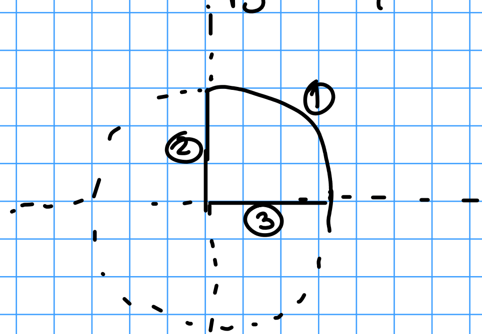


$$\partial D_1 = S_1$$

$$\partial D = (S_1 \cap D_2) \cup (D_1 \cap S_2)$$

Se

$$D = \{ x^2+y^2 \leq 1 \, , \; x \geq 0 \, , \; y \geq 0 \}$$



$$\partial D = \{ x^2+y^2=1, \, x\geq 0, \, y \geq 0 \} \cup \{ x^2+y^2 \leq 1 \, , \; x=0 \, , \; y \geq 0 \} \cup \{ x^2+y^2 \leq 1 \, , \; x \geq 0 \, , \; y=0 \} =$$

$$\underbrace{\{(x,y), \, x^2+y^2=1 \, , \; x\geq 0, \, y \geq 0\}}_{1} \cup \underbrace{\{(0,y) \; 0 \leq y \leq 1\}}_{2} \cup \underbrace{\{(x,0) \, , \; 0 \leq x \leq 1\}}_{3}$$

Posso anche chiamare Ω un dominio aperto regolare a tratti se

$$\Omega = \{ G_1 < 0, \dots, G_k < 0 \} \qquad (G_i \text{ come sopra})$$

Allora $\Omega = \mathring{D}$ $\quad \partial \Omega = \partial D =$ quella scritta sopra

---

<u>Def.</u> Se D è regolare a tratti

$D = \{ G_1 \leq 0, \dots, G_k \leq 0 \}$ allora posso distinguere

- La <u>frontiera regolare</u>

$$\partial_r D = \bigcup_{i=1}^{k} \{ G_i(x) = 0, \quad G_j(x) < 0 \text{ se } j \neq i \}$$

- La <u>frontiera singolare</u> $\quad \partial_s D = \partial D \setminus \partial_r D$

(in $\partial_s D$ più di una G_i si annulla)

<u>OSS.</u> Se c'è una sola G (Dominio regolare) $\Rightarrow \partial_r D = \partial D$ $\left(= \{G=0\} \right)$

Nei punti $x \in \partial_r D$ sono ben definiti

• La normale unitaria uscente a ∂D in x

$$\hat{\nu}(x) := \frac{\nabla G_i(x)}{\|\nabla G_i(x)\|}$$ dove G_i è l'unica condizione tale che $G_i(x)=0$

• La retta normale a ∂D in x

$$N_x(\partial D) = \{ \lambda \hat{\nu}(x), \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

• L'(iper)piano tangente a ∂D in x

$$T_x(\partial D) = \text{ortogonale a } N_x(\partial D)$$

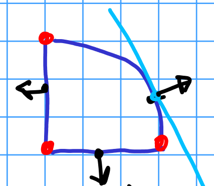
Nell'esempio di prima $D = \{ x^2+y^2 \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$

Ho

$$\partial_r D = \{x^2+y^2=1, \ x>0, \ y>0\} \cup \{x^2+y^2<1, \ x=0, \ y>0\} \cup \{x^2+y^2<1, \ x>0, \ y=0\} =$$

$$\{x^2+y^2=1, \ 0<x<1, \ 0<y<1\} \cup \{(0,y), \ 0<y<1\} \cup \{(x,0), \ 0<x<1\}$$

$$\partial_S D = \{(0,0), \ (0,1), \ (1,0)\}$$



• Nei punti $P=(0,y)$ con $0<y<1$ ho $\hat{\nu}(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ perché in questi punti si annulla solo $G_1(x,y) = -x$ e $\nabla G_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

INVECE $T_P(\partial D) = \{(0,y) \ \ y \in \mathbb{R}\}$

SONO GIÀ DI NORMA 1

• Nei punti $P=(x,0)$ con $0<x<1$ ho $\hat{\nu}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(qui si annulla solo $G_2(x,y) = -y$ e $\nabla G = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

e $T_P(\partial D) = \{(x,0) \ \ x \in \mathbb{R}\}$

• Nei punti $P=(x,y)$ con $x^2+y^2=1$ $x>0,\ y>0$ la normale è

$$\hat{\nu}(P)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Infatti in questi punti si annulla (solo) $G(x,y)=x^2+y^2-1$

e $\nabla G_3(x,y)=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$; $\|\nabla G_3\|=\sqrt{4x^2+4y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}=2$

$$\Rightarrow \quad \hat{\nu}(P)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Mentre il piano tangente è

$$T_P(\partial D)=\{(\eta,\xi):\ x\eta+y\xi=0\}$$