Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 31 09/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$f(x,y,z) = xyz$

$V = \{ x^2+y^2+z^2=1 \ , \ x+y-z=0 \}$

Vogliamo trovare $\max_V f$ e $\min_V f$

Visto che V è un vincolo regolare (di dim 1, codimensione 2 ← perché sono due condizioni di vincolo). Uso i MOLTIPLICATORI

$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$

+ condizioni di vincolo

$g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$g_2(x,y,z) = x+y-z$

$\left(G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu \\ xz = 2\lambda y + \mu \\ xy = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$-$

Moltiplico I riga per x, II° riga per y, III° riga per z $\Rightarrow$ sommo

$\Downarrow$

$xyz = 2\lambda x^2 + \mu x$

$xyz = 2\lambda y^2 + \mu y$

$xyz = 2\lambda z^2 - \mu z$

$\Rightarrow 3xyz = 2\lambda \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{1} + \mu \underbrace{(x+y-z)}_{0}$

$\Longrightarrow \quad 2\lambda = 3xyz$. Poi posso ricavare μ dalla II° rigo e sottrarre I − II $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} 2\lambda = 3xyz \\ \mu = -xy + 3xyz^2 \\ (y-x)z = 2\lambda(x-y) = 3xyz(x-y) \longleftarrow \text{III}^{\circ} \\ x^2+y^2+z^2=1, \quad x+y-z=0 \end{cases}$$

Lo III° rigo mi dà $x = y$ oppure $z = -3xyz$

(A) se $\boxed{x=y}$ $\Rightarrow z = 2x \qquad x^2+x^2+4x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} =$

$$\Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$$

(DUE PTI CRITICI VINCOLATI)

(B) se $\boxed{z = -3xyz}$ $\left\langle \begin{array}{l} z=0 \\ 1=-3xy \end{array}\right.$

(B.1) $z=0 \Rightarrow \quad x+y=0, \quad x^2+y^2=1 \Rightarrow y=-x \qquad 2x^2=1$

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

(ALTRI DUE PUNTI)

(B.2)
$$\begin{cases} 3xy = -1 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = -\frac{1}{3} \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ z^2 = x^2+y^2+2xy = x^2+y^2-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+x^2+y^2-\frac{2}{3} = 1 \qquad 2x^2+2y^2 = \frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} xy = -\frac{1}{3} \\ x^2+y^2 = \frac{5}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{1}{3x} \\ x^2 + \frac{1}{9x^2} = \frac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow 9x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 1 = 0$$

$t = x^2$

$$18t^2 - 15t + 2 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 8\cdot 18}}{36} = \frac{15\pm 9}{36}$$

$$t_1 = \frac{2}{3} \qquad t_2 = \frac{1}{6} \qquad x = \pm\frac{2}{\sqrt{6}} \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\pm \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ TUTTI DIVERSI

$\pm \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$

DEVO CALCOLARE $f(x,y,z) = xyz$ su tutti questi punti

<u>CASO A</u> $\pm \frac{2}{(\sqrt{6})^3} = \pm \frac{2}{6} \frac{1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{1}{3\sqrt{6}}$

<u>CASO B.1</u> $\to 0$

<u>CASO B.2</u> sempre $\pm \frac{2}{(\sqrt{6})^3} = \pm \frac{2}{6} \frac{1}{\sqrt{6}} = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6}$

DUNQUE. $\max_V xyz = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $\min_V xyz = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

CASO DI UN "VINCOLO DI DISUGUAGLIANZA"

$G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e considero

$V = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) \leq 0 \}$

CON <u>L'IPOTESI</u> se $\boxed{G(x) = 0 \Rightarrow \nabla G(x) \neq \vec{0}}$

(Per esempio $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ - qui $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$)

FATTO IN QUESTO $\boxed{\partial V = \{ x : G(x) = 0 \} = \partial \{ G < 0 \}}$ lo diamo per buono

<u>TEOREMA</u> Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ G come sopra e $V \subset \Omega$
Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

Sia $x_0 \in V$ un punto di max/min relativo per f su V

ALLORA CI SONO DUE CASI

(1) se $x_0 \in \mathring{V} = \{ G < 0 \}$, allora $\nabla f(x_0) = 0$

(2) se $x_0 \in \partial V = \{ G = 0 \}$ allora $\exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$

No DIM - Segue facilmente da tutto quanto fatto fino ad ora

L'ENUNCIATO SI PUÒ RIASSUMERE COSÌ:

Se x_0 è pb di max/min per f su V $\Rightarrow$

- $\exists \lambda : \quad \nabla f(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$
- se $x_0 \in \mathring{V}$ $\quad \lambda = 0$ $\quad$ (se x_0 è interno, il moltiplicatore è nullo cioè x_0 è critico "libero")

ESEMPIO $\quad$ Voglio max / min di

$f \to x^2 y^2$ su $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{pmatrix} \qquad \nabla G = \begin{matrix} 2x \\ 2y \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2xy^2 = 2\lambda x \\ 2x^2 y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 \leq 1, \quad \text{se } x^2+y^2 < 1 \ \lambda = 0 \end{cases}$ $\quad$ devo distinguere i casi

$\begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2 y = 0 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases} \longrightarrow (0, y) \quad (x, 0) \quad \text{con } \begin{matrix} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{matrix}$

IN QUESTI PUNTI $f(x,y) = x^2 y^2$ FA ZERO

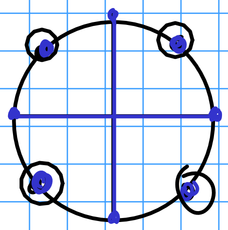
$\begin{cases} 2xy^2 = 2\lambda x \\ 2x^2 y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ $\quad$ Moltiplico la I° riga per x, la II° riga per y $\}$ sommo

$\begin{matrix} 2x^2y^2 = \cancel{2}\lambda x^2 \\ \cancel{2}x^2y^2 = \cancel{2}\lambda y^2 \end{matrix} \Rightarrow 2x^2y^2 = \lambda(x^2+y^2) = \lambda$

$\begin{cases} \lambda = 2x^2y^2 \\ 2x^2 y = 4x^2y^2 y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

La seconda implica $y = 0$ oppure $x = 0$ oppure $1 = 2y^2$

$\Rightarrow \quad \pm(0,1), \ \pm(1,0) \quad$ e $\begin{cases} y = \pm 1/\sqrt{2} \\ x^2 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \quad x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



$\leftarrow$ TUTTI I PUNTI CRITICI (LIBERI e VINCOLATI)

NEGLI ULTIMI PUNTI f vale $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \quad \min_V f = 0 \qquad \max_V f = \frac{1}{4}$$

TEOREMA GENERALE (sugli estremi vincolati)

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 $\quad \Omega$ aperto di $\mathbb{R}^N$

$G_1 \dots G_K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $H_1 \dots H_m : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tutte di classe C^1, CHIAMO

$$V = \{ X \in \mathbb{R}^N : G_1(x) = \dots = G_K(x) = 0,\ H_1(x) \le 0, \dots, H_m(x) \le 0 \}$$

K CONDIZIONI DI EGUAGLIANZA, m CONDIZIONI DI DISUGUAGLIANZA

IPOTESI SE $X \in V$ e ci sono $j_1 \dots j_r$ in $\{1 \dots m\}$ tali che $H_{j_1}(x) = H_{j_2}(x) = \dots = H_{j_r}(x)$, ALLORA I VETTORI (in $\mathbb{R}^N$)

$$\nabla G_1(x), \dots, \nabla G_K(x), \nabla H_{j_1}(x), \dots, \nabla H_{j_r}(x)$$

DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI

(IPOTESI DI REGOLARITÀ)

($\Rightarrow$ $K + r \le N$)

TESI Se X è punto di max/min per f su V

$\Rightarrow$ esistono $\lambda_1 \dots \lambda_K$, $\mu_1 \dots \mu_m$ in $\mathbb{R}$ tali che

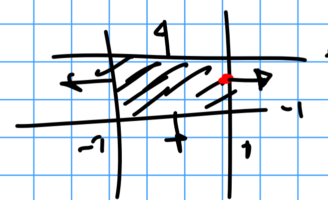
$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda_1 \nabla G_1(x) + \dots + \lambda_K \nabla G_K(x) + \mu_1 \nabla H_1(x) + \dots + \mu_m \nabla H_m(x) \\ \text{e} \quad \mu_j = 0 \ \text{ se } H_j(x) < 0 \qquad j = 1 \dots m \end{array}}$$

I moltiplicatori μ_j, relativi alle condizioni di disuguaglianza $H_j(x) \le 0$, ci sono **SOLO** se $H_j(x) = 0$ — SE NO $\mu_j = 0$

NO DIM

Per esempio il QUADRATO $Q = \{-1 \le x \le 1 ,\ 1 \le y \le 1\}$ è definito da quattro condizioni di disuguaglianza

$$H_1(x,y) = x - 1 \qquad H_2(x,y) = -x - 1$$
$$H_3(x,y) = y - 1 \qquad H_4(x,y) = -y - 1$$

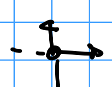


Q è REGOLARE ?? $\boxed{\text{SÌ}}$ INFATTI

① Se $H_j(x,y) = 0$ e le altre sono < 0
$j = 1 \dots 4$ $\Rightarrow (x,y)$ è in un LATO
IN QUESTO CASO $\nabla_j(x,y) \neq (0,0)$ (OVVIO)

② $H_i(x,y) = H_j(x,y) = 0$ $\quad (x,y)$ è UN VERTICE

$\Rightarrow$ devo verificare che $\nabla H_i(x)$ e $\nabla H_j(x)$ sono lin. indip.

È VERO   (SONO ORTOGONALI)

③ $H_i(x,y) = H_j(x,y) = H_k(x,y) = 0$ $\quad$ IMPOSSIBILE

IL QUADRATO È "REGOLARE"

STUDIAMO la funzione $f(x,y) = xy$ su Q

Se lo voglio schematizzare come nel teorema devo scrivere

$$\nabla f(x,y) = \mu_1 \nabla H_1(x,y) + \mu_2 \nabla H_2(x,y) + \mu_3 \nabla H_3(x,y) + \mu_4 \nabla H_4(x,y)$$

e $\mu_1 = 0$ se $H_i(x,y) < 0$. Supponiamo (x,y) come sopra

Lo posso trattare dividendo i casi così

① $H_i(x,y) < 0 \quad \forall i = 1,2,3,4$

$$\begin{cases} \nabla f = 0 \iff \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathring{Q} \quad |x|<1 \ \ |y|<1$$

$\boxed{\text{TROVO } (0,0)}$

② UNA SOLA $H_i(x,y) = 0$. Per esempio $H_1(x,y) = 0$ (cioè $x = 1$). $\Rightarrow$ $\nabla H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \nabla f = \mu_1 \nabla H_1 \\ -1 < x = 1 \quad -1 < y < 1 \end{cases} \iff \left.\begin{cases} y = \mu_1 \cdot 1 \\ x = \mu_1 \cdot 0 \\ x = 1 \quad -1 < y < 1 \end{cases}\right\} \text{IMPOSSIBILE} \quad \begin{matrix} x=1 \\ x=0 \end{matrix}$$

Nello stesso modo vedo che NON CI SONO pti critici vincolati sui lati (meno i vertici)

③ CI SONO DUE EGUAGLIANZE

Per esempio $H_1 = 0 \quad H_4 = 0 \quad (x = 1, \ y = -1)$

$\nabla f = \mu_1 \nabla H_1 + \mu_4 \nabla H_4 \leftarrow$ SEMPRE VERA

(dato che ∇H_1 e ∇H_4 sono lin. indip le loro comb. lineari generano $\mathbb{R}^2$ e dunque contengono ∇f)

DUNQUE OGNI VERTICE È PTO CRITICO VINCOLATO

DUNQUE I PUNTI ESTREMALI (di max/min) SONO

$(0,0) \quad (1,1) \quad (-1,1) \quad (1,-1) \quad (-1,-1)$

su cui f vale $0, \ 1, \ -1, \ -1, \ 1$

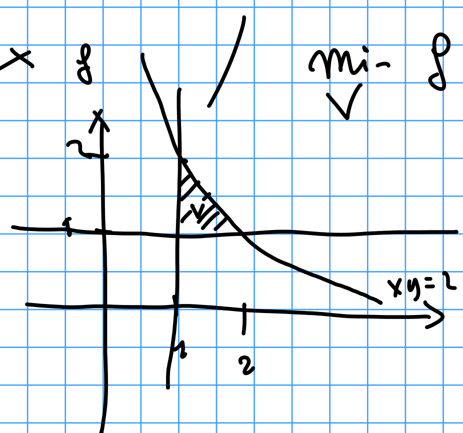
$\Rightarrow \max_Q f = 1 \qquad \min_Q f = -1$

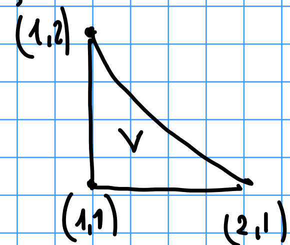
($(0,0)$ è pto di sella INTERNO A Q $\qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

<u>Esempio</u> (da un compito)

$$V = \{1 \le x, \ 1 \le y, \ xy \le 2\} \qquad f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\max_V f \quad / \quad \min_V f = ??$$





HO TRE CONDIZIONI

$$H_1(x,y) = 1 - x \qquad H_3(x,y) = xy - 2$$
$$H_2(x,y) = 1 - y$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla H_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla H_3 = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

① Nessuna eguaglianza (punti interni a V) $\qquad \nabla f = 0$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x > 1, \ y > 1, \ xy < 2 \end{cases} \quad \Big\} \ x = y = 0 \qquad \Leftarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

② UNA EGUAGLIANZA (TRE CASI)

(2.1) $\quad H_1 = 0 \quad H_2 < 0, \ H_3 < 0 \qquad \nabla f = \mu \nabla H_1 = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x = \mu(-1) \\ 2y = \mu \cdot 0 \quad y=0 \\ x=1 \;, y>1 \;, xy<2 \quad y>1 \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

(2.2) $\quad H_1 < 0 \quad H_2 > 0 \quad H_3 < 0 \qquad \nabla g = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

COME PRIMA È IMPOSSIBILE !

(2.3) $\begin{cases} 2x = \mu y \\ 2y = \mu x \\ x>1 \quad y>1 \quad xy=2 \end{cases}$

Moltiplico la I per x
la II per y

$\Downarrow$

$2x^2 = \mu xy = 2\mu$
$2y^2 = \mu xy = 2\mu$

$\mu = x^2 = y^2 \qquad x = \pm y$ (devono essere concordi $\Rightarrow x = y$.

$x^2 = 2 \qquad x = \sqrt{2} = y$

TROVO $\quad (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

③ I VERTICI (sono automaticamente critici)

$(1,1) \qquad (2,1) \qquad (1,2)$

CONFRONTIAMO I VALORI

$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \quad 2+2 = 4 \qquad f(1,1) = 1+1 = 2$

$f(2,1) = f(1,2) = 1+4 = 5$

MAX $\to$ 5 $\qquad$ MIN $\to$ 1