Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 30 04/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Definito ieri → $V \subset \mathbb{R}^N$ è un vincolo regolare di dim K ($K < N$) – si può anche dire di codimensione $N-K$ – se $V = \{x \in \mathbb{R}^N : G(x) = 0\}$ dove

$G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-K}$ di classe C^1

(A) $J_G(x)$ ha rango massimo $\forall x \in V$

DIMOSTRATO CHE se V è come sopra e $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $x_0 \in V$

$\vec{v}$ è tangente a V in x_0 $\iff$ $dG(x_0)\vec{v} = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{0} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{N-K})$

OSSERVIAMO CHE la condizione $dG(x_0)\vec{v} = 0$ $\iff$

$J_G(x_0)\vec{v} = 0$ cioè se $G = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_{N-K} \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} G_{N-K} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} G_{N-K} \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} \nabla G_1^{\,t} \\ \vdots \\ \nabla G_{N-K}^{\,t} \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{v} \cdot \nabla G_1 \\ \vdots \\ \vec{v} \cdot \nabla G_{N-K} \end{bmatrix}$$

CIOÈ $\vec{v}$ è ortogonale a tutti i $\nabla G_j(x_0)$ $\quad j = 1 \ldots N-K$

DUNQUE POSSIAMO DIRE IN ALTRO MODO IL RISULTATO DI IERI :

$$\boxed{\vec{v} \text{ è tangente a } V \text{ in } x_0 \iff \nabla G_j(x_0)\cdot \vec{v} = 0 \quad \forall j = 1 \dots N-K}$$

Pongo · $T_{x_0}(V) = \{\vec{v} \text{ tangente a } V \text{ in } x_0\} =$
$= \{\vec{v} \in \mathbb{R}^N : \nabla G_j(x_0)\cdot\vec{v} = 0 \quad j = 1 \dots N-K\}$

$T_{x_0}(V)$ si dice lo spazio tangente a V in x_0

· $N_{x_0}(V) = T_{x_0}(V)^{\perp} = \{\lambda_1 \nabla G_1(x_0) + \dots + \lambda_{N-K}\nabla G_{N-K}(x_0),\ \lambda_1 \dots \lambda_{N-K} \in \mathbb{R}\}$

esercizio di algebra lineare.

$N_{x_0}(V)$ si chiama spazio normale a V in x_0

Nota $T_{x_0}(V)$ ha dimensione K
$N_{x_0}(V)$ ha dimensione $N-K$

Nota L'ipotesi (★) $\iff$ $\nabla G_1(x_0) \dots \nabla G_{N-K}(x_0)$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

ESERCIZIO Prendiamo il vincolo di ieri :

$$V = \{(x,y,w,z) : 2xy + 3wz = 1,\ 3xz + 2yw = 0\}$$

e $P_0 = (2, 3, 2, -2)$.

Cerchiamo $N_{P_0}(V)$ e $T_{P_0}(V)$. Come dalla lezione di ieri:

$$J_G(P_0) = \begin{bmatrix} 6, & 4, & -6, & 6 \\ -6, & 4, & 6, & 6 \end{bmatrix}$$

Allora

$T_{P_0}(V) = \{(x,y,w,z) : 6x+4y-6w+6z=0,\ -6x+4y+6w+6z=0\}$

$N_{P_0}(V) = \{ \lambda(6,4,-6,6)+\mu(-6,4,6,6),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

$P \in N_{P_0}(V) \iff P=(x,y,w,z)$ con

$$\begin{cases} 6\lambda - 6\mu = x \\ 4\lambda + 4\mu = y \\ -6\lambda + 6\mu = w \\ 6\lambda + 6\mu = z \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} x+w=0 \\ 3y-2z=0 \end{array}} \leftarrow N_{P_0}(V)$$

VERO CHE $T_{P_0}(V)$ è generato da $(1,0,1,0)$, $(0,3,0,-2)$ #

RICERCA DEGLI "ESTREMI VINCOLATI"

<u>INGREDIENTI</u> $f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\quad\Omega\subset\mathbb{R}^N$ aperto f C^1

$V\subset\Omega$ $\quad V$ regolare di <u>codimensione k</u>

(di dimensione $N-k$). PIÙ PRECISAMENTE

Sia $G:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^k$ tale che $V=\{G=0\}$ e $\nabla G_j(x)$ lin. indip. $j=1..k$, $x\in V$

$V=\{G_1(x)=0 \dots G_k(x)=0\}$

(si usa dire che G è una funzione definente il vincolo V)

MI INTERESSANO I PUNTI DI MAX/MIN RELATIVO PER f su V

("estremi vincolati di f su V")

<u>TEOREMA</u> Se $x_0\in V$ è punto di max/min relativo per f su V $\implies$ $\nabla f(x_0)\in N_{x_0}(V)$ <u>cioè</u>:

$$\boxed{\exists\ \underbrace{\lambda_1\dots\lambda_k}_{\text{SI CHIAMANO MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE}}\in\mathbb{R} \text{ tali che } \nabla f(x_0)=\lambda_1\nabla G_1(x_0)+\dots+\lambda_k\nabla G_k(x_0)}$$

<u>Dim.</u> Supponiamo x_0 di max/min relativo. Sia $\vec{v}\in T_{x_0}(V)$

So che $\exists\ \gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to V$ tale che $\gamma(0)=x_0$ $\gamma'(x_0)=\vec{v}$.

$\implies$ 0 è punto di max/min rel per $f\circ\gamma$

Per Fermat (in una variabile) $\Rightarrow$ $(f\circ\gamma)'(0)=0$ $\Leftrightarrow$

$$0=\nabla f(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)=\nabla f(x_0)\cdot\vec{v}$$

DUNQUE $\nabla f(x_0)$ è ortogonale a tutti i vettori tangenti $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x_0)\in N_{x_0}(V)$ $\#$

- CHIAMERÒ PUNTO CRITICO VINCOLATO DI f su V un punto x_0 tale che $\nabla f(x_0)=\lambda_1\nabla G_1(x_0)+\dots+\lambda_h\nabla G_h(x_0)$, per $\lambda_1\dots\lambda_h\in\mathbb{R}$

- DUNQUE x_0 "punto di estremo relativo VINCOLATO" $\Rightarrow$ x_0 punto critico VINCOLATO
$\not\Leftarrow$ NON VALE IL VICEVERSA

CASO SPECIALE (IMPORTANTE) $h=1$

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ $\quad$ $G:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$
(basta $G:\Omega\to\mathbb{R}$)

Ω aperto di $\mathbb{R}^N$

$V=\{G(x)=0\}$ è di codimensione 1

(V è una "ipersuperficie" — se $N=3$ posso dire che V è una superficie di dim 2)

Allora x_0 è di max/min rel per f su V

$\Rightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}$ $\quad\nabla f(x_0)=\lambda\nabla G(x_0)$

Nota: Se $h=1$ la condizione $(\ast)$ diventa: $\forall x\in V$ $\exists j$ da 1 a N tale che $\frac{\partial G}{\partial x_j}(x)\neq 0$ CIOÈ $\boxed{\nabla G(x)\neq 0\quad\forall x\in V}$

ESEMPI

Cerco il max/min di $f(x,y)=xy$ su $V=\{x^2+y^2=1\}$

NOTO CHE V è definito da $G(x,y)=x^2+y^2-1$ e che

$\nabla G=\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}$ si annulla solo in $(0,0)\notin V$

(nei punti di V ∇G mai si annulla). Applico i moltiplicatori

$\Rightarrow$ Se $(x,y)\in V$ è "punto estremale" $\Rightarrow$ $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2x\\2y\end{pmatrix}=2\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad(+\ x^2+y^2=1)$$

DUNQUE DEVO RISOLVERE

$$\begin{cases} -2\lambda x + y = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

LE PRIME DUE RIGHE SONO UN SISTEMA LIN. IN (x,y); LA SOL. $(x,y)=(0,0)$ NON VA D'ACCORDO CON LA TERZA RIGA

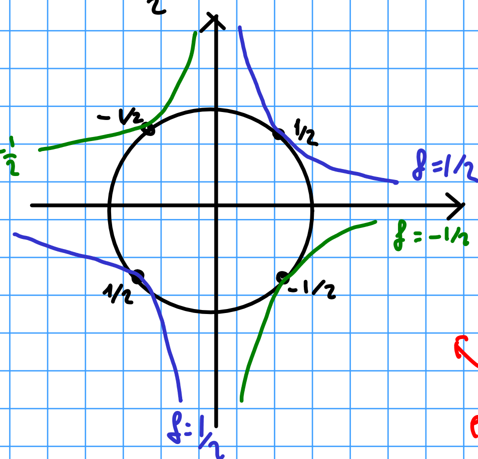
$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 1/2$$

$$\begin{cases} \lambda = \pm 1/2 \\ x = \pm y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

questi punti

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\shortparallel$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\shortparallel$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



$$\max_V f = \frac{1}{2}$$

$$\min_V f = -\frac{1}{2}$$

le linee di livello $\{f=1/2\}$ e $\{f=-1/2\}$ sono tangenti a V nei "punti estremali"

VERSIONE TRIDIMENSIONALE DEL PRECEDENTE

$$f(x,y,z) = xyz \qquad P=(x,y,z)$$

$$V = \{x^2+y^2+z^2 = 1\} \; ; \; G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

$$\nabla f(P) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \qquad \nabla G(P) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

USO I MOLTIPLICATORI (uso $\mu = 2\lambda$)

$$\begin{cases} yz = \mu x & \cdot x \\ xz = \mu y & \cdot y \\ xy = \mu z & \cdot z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz = \mu x^2 \\ xyz = \mu y^2 \\ xyz = \mu z^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{3xyz = \mu}$$

$$\begin{cases} yz = 3x^2yz \\ xz = 3xy^2z \\ xy = 3xyz^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \leftarrow \quad yz = 3x^2yz \Leftrightarrow \begin{array}{ll} y=0 & (1) \\ z=0 & (2) \\ 3x^2=1 & (3) \end{array}$$

① $y=0 \Rightarrow \begin{cases} xz=0 \\ 0=0 \\ x^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (0,0,\pm1) \\ (\pm1,0,0) \end{matrix}$

② $z=0 \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ xy=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (0,\pm1,0) \\ (\pm1,0,0). \end{matrix}$ DOPPIONE

③ $3x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} z=3y^2z \\ y=3yz^2 \\ y^2+z^2=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{z=0} \text{ oppure } 3y^2=1 \\ \cancel{y=0} \text{ oppure } 3z^2=1 \end{matrix}$

(3.1) $x^2=\frac{1}{3}, \; z=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0=\frac{2}{3}$ (IMPOSSIBILE)

$\Rightarrow 3y^2=1 \Rightarrow y\neq 0$

$$\boxed{x^2=\frac{1}{3}, \quad y^2=\frac{1}{3}, \quad z^2=\frac{1}{3}}$$

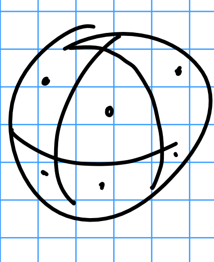
IN DEFINITIVA HO TROVATO I SEGUENTI PTI CRITICI VINCOLATI

$\left.\begin{matrix} (\pm1,0,0) \\ (0,\pm1,0) \\ (0,0,\pm1) \end{matrix}\right\}$ f VALE ZERO SU TUTTI QUESTI PUNTI

$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ (8 PUNTI)

f VALE $\pm\frac{\sqrt{3}}{9}$ (a seconda di come si combinano i segni)

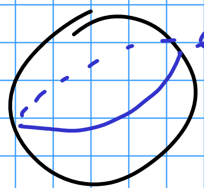
$\Rightarrow \max_V f = \frac{\sqrt{3}}{9} \qquad \min_V f = -\frac{\sqrt{3}}{9}$



VARIANTE $\quad f(x,y,z) = xyz$

$$V = \{ x^2+y^2+z^2=1 \ , \ x+y-z=0 \}$$

HO INTERSECATO LA SFERA CON UN PIANO (passante per 0)



V (codimensione 2, dimensione 1)

VEDIAMO SE V è regolare

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x+y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla G_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla G_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

DEVO VERIFICARE CHE

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ ha rango 2 nei punti di V

A_1

Per esempio $\quad \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2(x-y)$

$$\det \begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2(x+z)$$

$$\det \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2(y+z)$$

I "PUNTI CATTIVI" dovrebbero verificare

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \\ y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ y+z=0 \\ 2y=z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$y+z=0 \Rightarrow 3y=0 \Rightarrow$ TUTTI ZERO

IMPOSSIBILE

OK il vincolo è regolare. CERCO I PTI CRITICI VINCOLATI

$$\nabla f = \lambda \nabla G_1 + \mu \nabla G_2$$

$$\begin{cases} yz = 2\lambda x + \mu \\ xz = 2\lambda y + \mu \\ xy = 2\lambda z - \mu \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$\mathrm{I}^\circ + \mathrm{II}^\circ - \mathrm{III}^\circ$ (λ sparisce)

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{yz+xz-xy}{3} = \mu}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}yz - \frac{1}{3}xz + \frac{1}{3}xy = 2\lambda x \\ -\frac{1}{3}yz + \frac{2}{3}xz + \frac{1}{3}xy = 2\lambda y \\ \frac{1}{3}yz + \frac{1}{3}xz + \frac{2}{3}xy = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

Molt. $\mathrm{I}^\circ \times x$, $\mathrm{II}^\circ \times y$, $\mathrm{III}^\circ \times z$ e sommo

??

$$\Rightarrow 2\lambda = \frac{2}{3}xyz - \frac{1}{3}x^2z + \frac{1}{3}x^2y - \frac{1}{3}y^2z + \frac{2}{3}xyz + \frac{1}{3}xy^2 + \frac{1}{3}yz^2 + \frac{1}{3}xz^2 + \frac{2}{3}xyz$$

$$= 2xyz$$

LUNGO ?? LO FINIAMO LUNEDì

MOLTIPLICO LA I° PER x, II° PER y, LA III PER z (senza usare l'espressione di μ trovata sopra)

SOMMA ZERO

$$\begin{cases} xyz = 2\lambda x^2 + \mu x \\ xyz = 2\lambda y^2 + \mu y \\ xyz = 2\lambda y^2 - \mu z \\ x^2+y^2+z^2=1 \quad x+y-z=0 \end{cases}$$

SOMMO

$3xyz = 2\lambda$

METTO $\boxed{\frac{yz+xz-xy}{3} = \mu}$ $\boxed{2\lambda = \frac{xyz}{3}}$ nel sistema ...

LO FINIAMO LUNEDì