Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 29 03/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

<u>Def.</u> Siano $N \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{N}$ con $K < N$.
Dico che un insieme $V \subset \mathbb{R}^N$ è un <u>"VINCOLO" REGOLARE DI DIMENSIONE K</u>

se $V = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) = 0 \}$ dove G è una funzione di classe C^1, $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-K}$, tale che

$$\forall x \in V \qquad \underset{((N-K)\times N)}{J_G(x)} \quad \text{ha rango } N-K$$

(cioè $\forall x \in V$ esiste un minore M di $J_G(x)$, M è $(N-K)\times(N-K)$ e $\det(M) \neq 0$). Dunque $J_G(x)$ ha "RANGO MASSIMO" in ogni punto x.

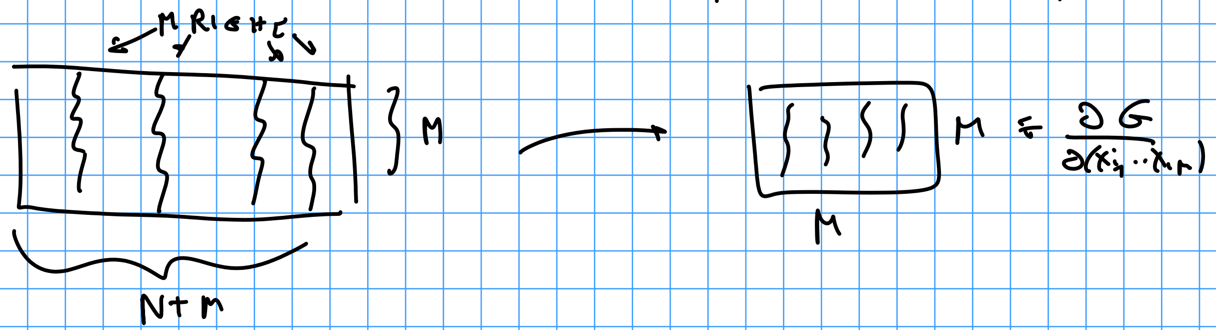
CONFRONTIAMO QUESTA DEF. CON IL TEOR. DI IERI

<u>DINI</u> $\to$ $G : \underset{(x,y),\ x\in\mathbb{R}^N,\ y\in\mathbb{R}^M}{\mathbb{R}^{N+M}} \to \mathbb{R}^N$ $\qquad \det\left(\frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right) \neq 0$

Allora ....

IN REALTÀ È FACILE VEDERE CHE L'IPOTESI

"GIUSTA" è che ci siano M variabili tra le N+M disponibili $(x_1 \dots x_{N+M}) \ni (x_{i_1} \dots x_{i_M})$ tali che $\det\left(\frac{\partial G}{\partial(x_{i_1}\dots x_{i_M})}\right) \neq 0$ (il caso di ieri corrisponde a $x_{i_1},\dots, x_{i_M} = x_{N+1},\dots,x_{N+M}$)



ALLORA SI DIMOSTRA CHE esiste la funzione implicita $g = g(x_{i_1}\dots x_{i_M})$ tale che le $(x_{i_1}\dots x_{i_M}) = g(\text{rimanenti variabili})$ $\quad (g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^M)$

TORNIAMO ALLA DEF SOPRA: in tal caso N gioca il ruolo di N+M e $M = N-K$.

Il fatto che $J_G(x)$ abbia rango $N-K$ significa che V è grafico (localmente) di una funzione $\hat{g}: \mathbb{R}^K\to\mathbb{R}^{N-K}$

$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^{N-K}$ "POSSO ESPLICITARE LE N-K VARIABILI $x_{i_1}\dots x_{i_{N-K}}$ tali che $\det\left(\frac{\partial G}{\partial(x_{i_1}\dots x_{i_{N-K}})}(x)\right)\neq 0$, in termini delle K rimanenti"

ESEMPIO $\quad V=\{(x,y,w,z) : 2xy+3wz=1,\ 3xz+2yw=0\}$! costanti ?

Mi chiedo se V è regolare (di dim. 2), e che variabili posso esplicitare.

IN QUESTO CASO HO $\quad G(x,y,w,z) = \begin{pmatrix}2xy+3wz-1\\3xz+2yw\end{pmatrix}$

($V = \{ G(x,y,w,z) = (0,0) \}$. Calcoliamo la Jacobiana di G :

$$J_G(x,y,w,z) = \begin{bmatrix} 2y, & 2x, & 3z, & 3w \\ 3z, & 2w, & 2y, & 3x \end{bmatrix}$$

Devo vedere se J_G ha rango 2. Devo per questo calcolare 6 determinanti, corrispondenti alle "sottomatrici"

$$\frac{\partial G}{\partial(x\,y)} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 3z, & 2w \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4yw - 6xz \qquad ①$$

$$\frac{\partial G}{\partial(x\,w)} = \begin{bmatrix} 2y & 3z \\ 3z & 2y \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4y^2 - 9z^2 \qquad ②$$

$$\frac{\partial G}{\partial(x,z)} = \begin{bmatrix} 2y & 3w \\ 3z & 3x \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 6xy - 9wz \qquad ③$$

$$\frac{\partial G}{\partial(y,w)} = \begin{bmatrix} 2x & 3z \\ 2w & 2y \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4xy - 6wz \qquad ④$$

$$\frac{\partial G}{\partial(y,z)} = \begin{bmatrix} 2x & 3w \\ 2w & 3x \end{bmatrix} \longrightarrow 6x^2 - 6w^2 \qquad ⑤$$

$$\frac{\partial G}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} 3z & 3w \\ 2y & 3x \end{bmatrix} \longrightarrow 9xz - 6yw \qquad ⑥$$

MI SERVE CHE ALMENO UNO NON SI ANNULLI NEI PUNTI DI $V = \{G = 0\}$

SUPPONIAMO CHE FACCIANO TUTTI ZERO $\Rightarrow$

② $\Rightarrow$ $y = \pm \frac{3}{2} z$ ⑤ $\Rightarrow$ $x = \pm w$

METTO IN $G(x,y,w,z) \Rightarrow$

$2(\pm w)(\pm \frac{3}{2} z) + 3wz = 1$ $\quad \pm 3wz + 3wz = 1$ o ENTRAMBI + o ENTRAMBI −

$wz = \frac{1}{6} \neq 6 \Longleftarrow \boxed{6wz = 1}$ $\quad \left(\begin{smallmatrix} \pm \\ -- \end{smallmatrix}\right)$

$$3(\pm w)z + 2\left(\pm \frac{3}{2} z\right) w = 0 \leftarrow$$

$+\,+ \Rightarrow \quad 3zw + 3zw = 0$ $\Rightarrow wz = 0$ IMPOSSIBILE $(wz = 1/6)$

$-\,- \Rightarrow \quad -3wz - 3wz = 0$

QUINDI IL VINCOLO È REGOLARE

- Se prendo $P_0 = (2, 3, 2, -2)$, vedo che

$$G(P) = \begin{pmatrix} 2\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2(-2) \\ 3\cdot 2(-2) + 2\cdot 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P \in V$$

DOMANDA: Che variabili posso esplicitare vicino a P_0 ??

$$J_G(P_0) = \begin{bmatrix} 6, & 4, & -6, & 6 \\ -6, & 4, & 6, & 6 \end{bmatrix}$$

Quali minori 2×2 è invertibile. Per esempio

$$\frac{\partial G}{\partial (x,y)}(P_0) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{è invertibile}$$

$\Rightarrow \exists$ due funzioni $X(w,z)$, $Y(w,z)$ tali che vicino a P_0 $V = \{X(w,z), Y(w,z), (w,z) \simeq (2,-2)\}$

- ANALOGAMENTE SI PUÒ FARE CON ALTRI MINORI #

Ricordiamo che, se $V \subset \mathbb{R}^N$ (senza ipotesi), $x_0 \in V$ dico che $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ è tangente a V in x_0 se esiste una curva C^1 $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$, $\varepsilon > 0$ tale che $\gamma(0) = x_0$ $\gamma'(0) = \vec{v}$

TEOREMA Se $V \subset \mathbb{R}^N$ è un vincolo regolare di dim $K < N$

allora, dato $x_0 \in V$,

$$\vec{v} \text{ è tangente a } V \text{ in } x_0 \iff J_G(x_0)\,\vec{v} = 0$$

(dove G è una qualunque funzione che verifica la definizione ...)

Detto altrimenti $\{\vec{v}$ tangente a V in $x_0\} = \ker J_G(x_0)$

e quindi è uno spazio vettoriale di dimensione K

DIM ($\Rightarrow$) Sia $\vec{v}$ tangente a V in x_0. Allora

$\exists\ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V \ : \ \gamma(0) = x_0 \quad \gamma'(0) = \vec{v}$

Se G è come nella def $\Rightarrow V = \{G = 0\} \Rightarrow$

$$G(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(G \circ \gamma)(t) \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$$

Per la derivata della funzione composta

$$\frac{d}{dt} G(\gamma(t)) = J_G(\gamma(t))\,\gamma'(t)$$ e nello $t=0$ $\Rightarrow$

$$J_G(x_0)\,\vec{v} = 0$$

HO DIM. $\Rightarrow$.

($\Leftarrow$) Sia $\vec{v} \in \ker J_G(x_0)$. PER SEMPLICITA'

SUPPONGO $x = (x', y)$ $\quad$ x' = prime K variabili, y = ultime $N-K$ variabili

$$\frac{\partial G}{\partial y'}(x_0) \neq 0$$

$$J_G = \begin{array}{cc} \left[\ \boxed{}\ , \right. & \left. \boxed{}\ \right] \\ K & N-K \\ x' & y \end{array} \quad N-K$$

Per il DINI $\Rightarrow$ che esiste f tale che

$$V = \{ (x', y) : x' \simeq x'_0 , \; y = f(x') \}$$

Prendiamo $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_y \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v}_{x'} \in \mathbb{R}^k \quad \vec{v}_y \in \mathbb{R}^{N-k}$

- Consideriamo

$$\gamma(t) = \left(x'_0 + t\vec{v}_{x'} , \; f(x'_0 + t\vec{v}_{x'}) \right)$$

$$\gamma(0) = (x'_0, f(x'_0)) = (x'_0, y_0) = x_0$$

$\gamma(t) \in V$ per la def di f

$$\gamma'(t) = \left(\vec{v}_{x'} , \; J_f(x'_0 + t\vec{v}_x) \cdot \vec{v}_{x'} \right) \Rightarrow$$

$$\gamma'(0) = \left(\vec{v}_{x'} \; J_f(x'_0) \cdot \vec{v}_{x'} \right) =$$

$$\boxed{\left(\vec{v}_{x'} , - \left(\frac{\partial G(x_0)}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x'}(x_0) \right) \vec{v}_{x'} \right)} = (v_{x'}, v_y) = \vec{v}$$

MA IO SO CHE $J_G(x_0)\vec{v} = 0 \iff$

$$\frac{\partial G}{\partial x'} \vec{v}_{x'} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{v}_y = 0 \iff$$

$$\vec{v}_y = - \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x'} \right) \vec{v}_{x'}$$

DUNQUE SE $\vec{v} \in \operatorname{Ker} J_G(x_0) \Rightarrow$

$\exists \, \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to V$ tale che $\gamma(0) = x_0 \quad \gamma'(0) = \vec{v}$

FINE