Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 28      02/12/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Altro esempio legato al teorema di inversione locale.

COORDINATE POLARI    Considero $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$\phi$ è di classe $C^1$ e la sua matrice Jacobiana è:

$$J_\phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

Il determinante di $J_\phi$ fa:

$$\det J_\phi(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

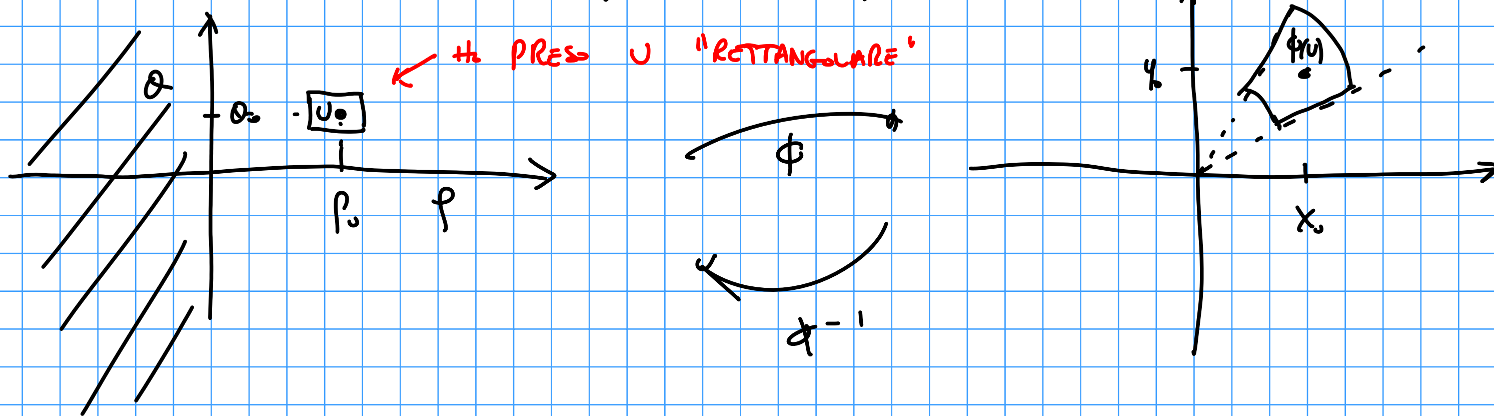
questo è $\neq 0 \iff \rho \neq 0$. Di norma si considera $\rho \geq 0$

quindi VALE IL TEOR. DI INVERTIBILITÀ LOCALE su $\{\rho > 0, \theta \in \mathbb{R}\}$

CIOÈ: $\forall\ (\rho_0, \theta_0)$ con $\rho_0 > 0$ $\exists$ intorno $U$ di $(\rho_0, \theta_0)$

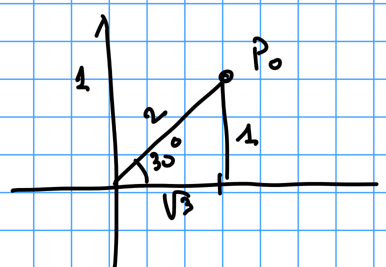
tale che:
- $\phi$ è iniettiva su $U$
- $\phi(U)$ è un aperto
- $\phi^{-1} : \phi(U) \to U$ è $C^1$ e $J_{\phi^{-1}}(x_0, y_0) = J_\phi(\rho_0, \theta_0)^{-1}$

dove $(x_0, y_0) = \phi(\rho_0, \theta_0)$




Per esempio posso considerare $P_0 = (\sqrt{3}, 1)$

che corrisponde a $\rho_0 = 2$ $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$




CERCHIAMO DI CALCOLARE

$$\left.\begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\rho(x,y)\end{matrix}\right|_{x=\sqrt{3},\, y=1} \qquad \begin{matrix}\frac{\partial}{\partial x}\theta(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}\theta(x,y)\end{matrix}$$

(Io conosco l'espressione di $x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta$ $y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$; so che esiste l'inverso $\big(\rho(x,y), \theta(x,y)\big)$ per $(x,y) \simeq P_0$ )

- CALCOLO $J_\phi(\rho,\theta)$ nel punto $\rho = 2$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$J_\phi(\rho_0,\theta_0) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -2\,\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$\det J_\phi(\rho_0,\theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \; (= \rho_0)$

- CALCOLO LA MATRICE INVERSA

MATRICE DEI COFATTORI DELLA TRASPOSTA

$$J_\phi(\rho_0,\theta_0)^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(J_\phi)}}_{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{cof.}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

Ne deduco che $\frac{\partial \rho}{\partial x}(\sqrt{3},1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\partial \rho}{\partial y}(\sqrt{3},1) = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial \theta}{\partial x}(\sqrt{3},1) = -\frac{1}{4}$ $\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(\sqrt{3},1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

FACCIAMO LA VERIFICA CALCOLANDO ESPLICITAMENTE $\phi^{-1}$. Dati $(x,y)$ devo trovare $(\rho,\theta)$!

$$\begin{cases} \rho\cos\theta = x \\ \rho\sin\theta = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & (\rho>0) \\ \frac{y}{x} = \tan(\theta) \end{cases}$$

e cerco $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ✓

SE HO $(x,y)$ con $x>0$ (OK con $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$)

allora $\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$ $(+ \;\ldots)$

!!

(TORNA CON $\rho(\sqrt{3},1) = \sqrt{3+1} = 2 = \rho_0$

$\theta(\sqrt{3},1) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ )

Calcoliamo le derivate parziali di $\rho(x,y)$ e $\theta(x,y)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

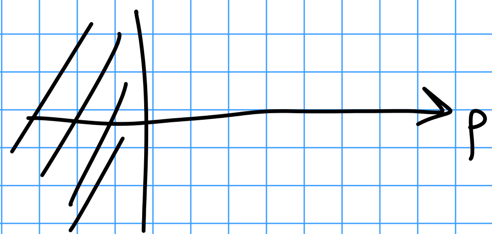
METTO $x=\sqrt{3}$ $y=1$

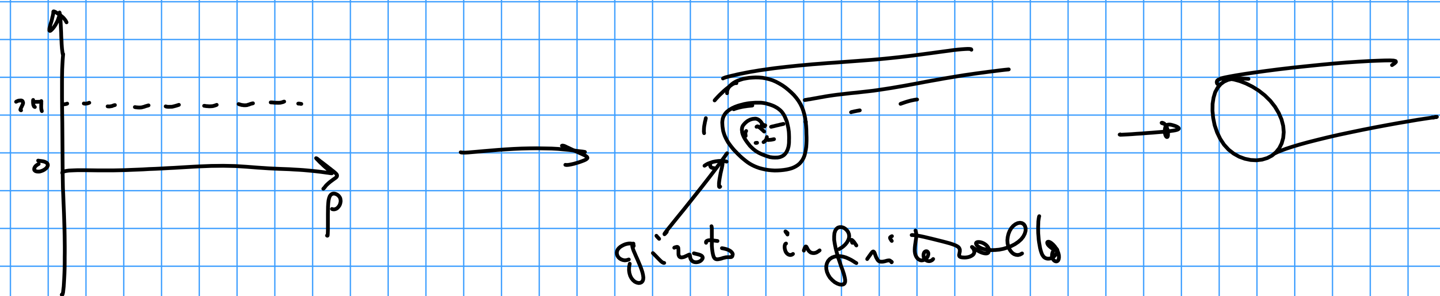
$\Rightarrow$ $\frac{\partial \rho}{\partial x}(\sqrt{3},1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\partial \rho}{\partial y}(\sqrt{3},1) = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial \theta}{\partial x}(\sqrt{3},1) = \frac{-1}{4}$ $\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(\sqrt{3},1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

TORNA CON QUANTO TROVATO PRIMA !!

**OSS** È CHIARO CHE $\Phi(\rho,\theta)$ NON HA UNA INVERSA SU TUTTO $\{\rho>0\}$. Ci sono infiniti $\theta$ tali che $\Phi(\rho,\theta)=(x,y)$ (dato $(x,y)\neq(0,0)$)




---

## TEOREMA DEL DINI (o DELLA FUNZIONE IMPLICITA)

Si parte da una funzione $G:\Omega\to\mathbb{R}^M$ dove $\Omega\subset\mathbb{R}^{N+M}$, $G$ di classe $C^1$.

**IPOTESI** $N>0$ $M>0$ (se $N=0$ ritrovo il teorema di inversione locale)

**NOTAZIONE** $P\in\Omega$, scrivo $P=(x,y)$ con $x\in\mathbb{R}^N$ $y\in\mathbb{R}^M$

$$\Big(\text{se } P\in\mathbb{R}^5\times\mathbb{R}^3 \text{ scrivo } P=\big(\underbrace{(x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5)}_{x},\underbrace{(y_1\,y_2\,y_3)}_{y}\big)\Big)$$

Inoltre scrivo:

$$\frac{\partial G}{\partial x}(P)=\left.\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_N}(P)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_M}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial G_M}{\partial x_N}(P)\end{bmatrix}}_{N}\right\}M \qquad \frac{\partial G}{\partial y}=\left.\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial G_1}{\partial y_1}(P) & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_M}(P)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_M}{\partial y_1}(P) & \cdots & \frac{\partial G_M}{\partial y_M}(P)\end{bmatrix}}_{M}\right\}M$$

DUNQUE
$$J_G(P)=\left.\underbrace{\left[\frac{\partial G(P)}{\partial x},\frac{\partial G(P)}{\partial y}\right]}_{N+M}\right\}M$$

NEL CASO PIÙ SEMPLICE $M=1$ DUNQUE

$G : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

I punti $P = (x, y)$ $\quad x \in \mathbb{R}^N \quad y \in \mathbb{R}$

$$J_G = [\underbrace{\nabla_x G^t}_{N\text{-componenti}}, \underbrace{\frac{\partial G}{\partial y}}_{\text{NUMERO}}] \leftarrow \text{UNA RIGA}$$

---

MI INTERESSA STUDIARE L'INSIEME

$$M := \{ (x,y) \in \Omega : G(x,y) = 0_M \}$$

$$0_M = (\underbrace{0, \dots, 0}_{M}) .$$

$M$ è "definito implicitamente da $G$.

---

ESEMPIO $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ è di questo tipo dove

$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ . Qui $G \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

( NON È CHIARO QUALE SIA LA DECOMPOSIZIONE "NATURALE" DI $\mathbb{R}^3$ come $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . QUI $N=2$ $M=1$ )

---

TEOREMA (del DINI o delle funz. implicite)

Se $P_0 = (x_0, y_0) \in M$ $\quad ( G(P_0) = 0 )$ e se
$\det\left(\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)\right) \neq 0$ $\quad$ ( cioè $\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)$ è invertibile )

ALLORA

$\exists \rho > 0$, $\exists W$ aperto in $\mathbb{R}^N$ con $x_0 \in W$,
$\exists g : W \to \mathbb{R}^M$ tale che

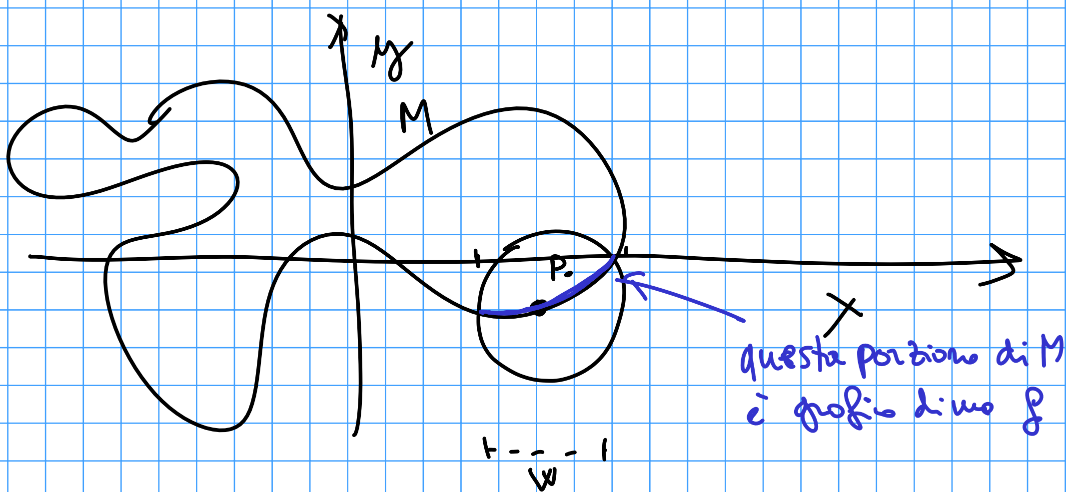
(a) $f$ è $C^1$

(b) $M \cap B(P_0, \rho) = \{(x,y) : x \in W,\ y = f(x)\}$

(c) $\forall x \in W$ si ha:

$$\left[\ J_f(x) = -\left(\frac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, f(x))\right)\ \right]$$

INTUITIVAMENTE: VICINO A $(x_0, y_0) = P_0$ l'insieme $M$ è grafico della "funzione implicita" $f$. (questo è la (b))




ESEMPIO della sfera

$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = 2z$

SUPPONIAMO CHE $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \{G = 0\}$

E SUPPONIAMO che $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq 0 \iff \boxed{z_0 \neq 0}$

USIAMO IL TEOREMA RAGGRUPPANDO LE VARIABILI: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

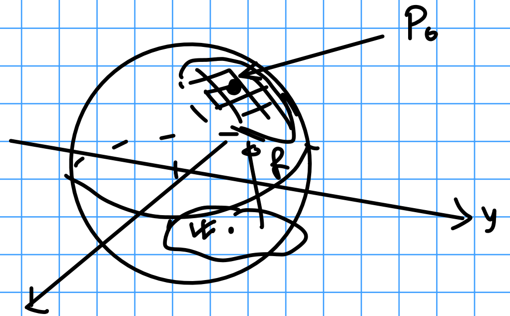
$$\begin{array}{cc} (x, y) & z \\ \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array} \quad \leftarrow \text{NEL TEOREMA}$$

VALE L'IPOTESI

$\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) \neq 0$

($m = 1 \Rightarrow$ HO UN NUMERO)

IL TEOREMA MI DICE CHE IN UN INTORNO DI $P_0=(x_0,y_0,z_0)$




- esiste $\rho>0$
- esiste una funzione $f(x,y)$ definita in un intorno di $(x_0,y_0)$ tale che

$$S \cap B(P_0,\rho) = \{(x,y,z) : (x,y)\in W,\ z=f(x,y)\}$$

$$\left( \text{ovviamente } f(x,y) = \begin{matrix} +\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } z>0 \\ -\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } z<0 \end{matrix} \right)$$

- SI VEDE CHE se $z=0$ la sfera $S$ NON è grafico di una $z=f(x,y)$

- Il teorema dice anche quanto fanno le derivate della funzione implicita: se $z_0\neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial(x,y)} f(x_0,y_0) = -\frac{\partial G}{\partial z}(P_0)\cdot \frac{\partial G}{\partial(x,y)}(P_0) \qquad \text{CIOÈ}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial G}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)^{-1}\,\frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial G}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)^{-1}\,\frac{\partial G}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$$

CIOÈ:

$$\left[\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{2x_0}{2z_0} = -\frac{x_0}{f(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{2y_0}{2z_0} = -\frac{y_0}{f(x_0,y_0)} \end{matrix}\right]$$

se so che $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ottengo $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ TORNA
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (con il calcolo delle derivate)

- È INTUITIVO che la variabile $z$ è arbitraria. Nello stesso modo se $\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0$ ricavo $x = X(y,z)$

per $(y,z)$ vicino a $(y_0, z_0)$.

STESSO DISCORSO SE $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$

---

DIM (del teorema del Dini)

$P_0 = (x_0, y_0)$

$G : \Omega \to \mathbb{R}^M \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^{N+M} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \; ; \quad G(P_0) = 0$

So che $\frac{\partial G}{\partial X}(P_0) = \frac{\partial G}{\partial (x_1 \dots x_N)}(P_0)$ ha det. $\neq 0$

CONSIDERO LA FUNZIONE $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^{N+M}$ def. da

$$\underbrace{\phi(x, y)}_{\mathbb{R}^{N+M}} = \underbrace{(x, G(x,y))}_{\mathbb{R}^{N+M}} \qquad \text{Ho:}$$

$$\Phi(P_0) = \phi(x_0, y_0) = (x_0, 0_M)$$

$\phi$ è differenziabile e si vede che

$$J_\phi(P_0) = \begin{array}{c@{}c} \left[\begin{array}{c|c} I_N & 0 \\ \hline \frac{\partial G}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(P_0) \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\, N \\ \}\, M \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{N} & \underbrace{\qquad}_{M} \end{array} & \end{array}$$

$$\det J_\phi(P_0) = \det \frac{\partial G}{\partial y}(P_0) \neq 0$$

Per il teorema di inversione locale $\exists \rho > 0$ tale che:

- $\phi : B(P_0, \rho) \to \mathbb{R}^{N+M}$ è iniettiva
- $\phi(B(P_0, \rho)) = \Omega_1$ è aperto in $\mathbb{R}^{N+M}$
- $\phi^{-1} : \Omega_1 \to B(P_0, \rho)$ è $C^1$ ( e ... )

Chiamo $\Psi = \phi^{-1}$. $\quad \Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ $\quad \Psi_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^N$
$\Psi_2 : \Omega_1 \to \mathbb{R}^M$

Dato che $\phi \circ \Psi =$ identità $\iff$

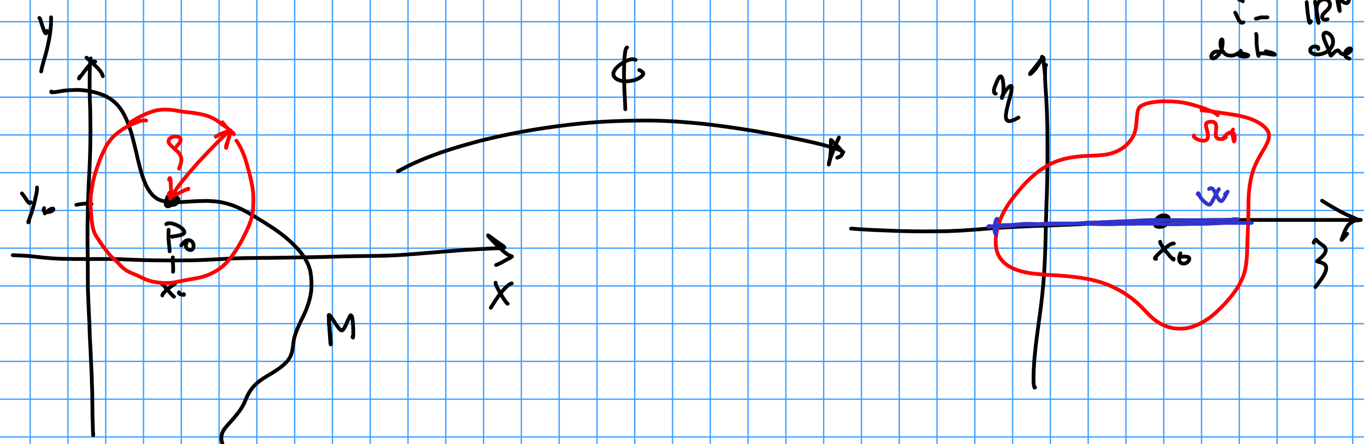
$$\phi\Big(\underbrace{\Psi_1(\xi,\eta)}_{x}, \underbrace{\Psi_2(\xi,\eta)}_{y}\Big) = (\xi, \eta) \qquad \Big(\phi(x,y) = (x, G(x,y))\Big)$$

$$\|$$

$$\Big(\Psi_1(\xi,\eta),\ G\big(\Psi_1(\xi,\eta), \Psi_2(\xi,\eta)\big)\Big)$$

OTTENGO $\quad \Psi_1(\xi,\eta) = \xi \quad ; \quad \boxed{G(\xi, \Psi_2(\xi,\eta)) = \eta \quad \star}$

· ALLORA CHIAMO $\quad W = \{ x : (x,0) \in \Omega_1 \}$. $W$ è aperto in $\mathbb{R}^N$ dato che $\Omega_1$ è aperto




e definisco $\quad g(x) = \Psi_2(x, 0) \quad$ da $W \to \mathbb{R}^M$

· ALLORA $\quad$ (1) $\quad$ se $x \in W$

$$G(x, g(x)) = G(x, \Psi_2(x,0)) = 0 \qquad \left(\text{VEDI } \star \text{ con } \eta = 0\right)$$

(2) se $(x,y) \in B(x_0, \rho)$, $\quad G(x,y) = 0 \implies$

$$\phi(x,y) = (x, G(x,y)) = (x, 0) \in \Omega_1$$

$\implies x \in W$ e $\quad (x,y) = \Psi^{-1}(x,0) \quad$ in particolare

$y = \Psi_2(x,0) \quad$ cioè $\quad \boxed{y = g(x)}$

[DUNQUE i punti di $M \cap B(P_0, \rho)$ sono tutti e soli i punti $(x, g(x))$ con $x \in W$]

. C'è da dim che $f$ è $C^1$ e vale la formula.

Notiamo che

$$f(x) = \boxed{\psi_2(x,0) = \pi(\psi(\sigma(x)))} \quad \left(\text{da } \underset{\mathbb{R}^N}{\overset{\cap}{W}} \to \mathbb{R}^M\right)$$

dove $\pi(x,y) = y$ $\qquad$ $\sigma(x) = (x,0)$

$\pi : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$ $\qquad$ $\sigma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N+M}$

Si vede subito che $\pi$ e $\sigma$ sono $C^1$ e che

$$J_\pi(x,y) = \Big[\underbrace{0}_{N} \,,\ \underbrace{I_M}_{M}\Big] \Big\} M$$

$$J_\sigma(x) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_N \\ 0 \end{bmatrix} \\ N \end{array} \begin{array}{l} \} N \\ \} M \\ \phantom{N} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f \text{ è } C^1 \text{ e } \quad J_f(x) = J_\pi \, J_\psi(x,0) \, J_\sigma(x) \iff$$

$$J_f(x) = [I_N, 0] \begin{bmatrix} \\ J_\phi \\ \\ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_N \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^{-1} \end{array}\right] \qquad = \qquad -\left(\frac{\partial G}{\partial y}(P_0)\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(P_0)$$

fare i conti ...

( Provare a fare l'inverso di $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b^{-1}a & b^{-1} \end{bmatrix}$

Ho verificato $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x) = \left(\dfrac{\partial G(x, f(x))}{\partial y}\right)^{-1} \left(\dfrac{\partial G(x, f(x))}{\partial x}\right)$

#

OSS. Se $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ e se

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^N : G(x) < 0 \}$$

($\Omega$ è aperto perché $G$ è continua).

Se $\forall x \in \{G(x) = 0\}$ si ha $\nabla G(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \partial\Omega = \{G(x) = 0\}$$

(in generale - se so solo che $G$ è continua - ho $\partial\Omega \subset \{G(x)=0\}$ )

ci torniamo