Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 26 26/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPIO (Teor. inv. locale)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \to \det J_f(x,y) = 4(y^2-x^2)$$

Quindi: $\det J_f(x,y)=0 \iff y = \pm x$

Dal teorema ricavo che f è localmente invertibile nei punti (x,y) con $y \neq \pm x$

POSSIAMO PROVARE A "CALCOLARE L'INVERSA": dati $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ cerco di risolvere l'equazione $f(x,y)=(\xi,\eta)$

CIOÈ
$$\begin{cases} 2xy = \xi \\ x^2+y^2 = \eta \end{cases}$$

PASSO IN COORD. POLARI

$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$

$$\iff \circledast \boxed{\begin{cases} \rho^2 \sin(2\theta) = \xi \\ \rho^2 = \eta \end{cases}} \leftarrow \text{VEDO CHE}$$

① se (*) ha soluzione $\eta \geq 0$

- Se $\eta = 0 \Rightarrow \xi$ deve essere ZERO e allora

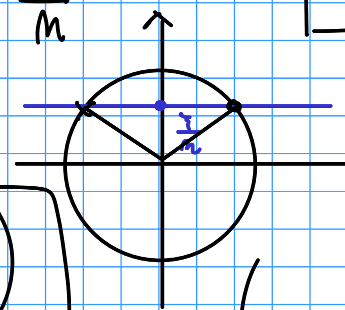
tutti i θ vanno bene, PERÒ L'UNICA SOLUZIONE È $(0,0)$

$(\eta, \xi) = (0, 0)$ corrisponde a $(x, y) = (0,0)$

- Se $\eta > 0$, la prima eq. diventa

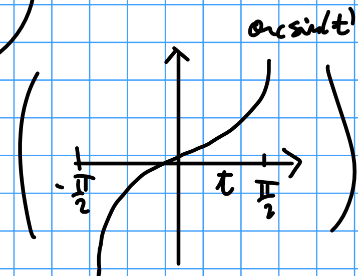
$$\sin(2\theta) = \frac{\xi}{\eta}$$

DUNQUE DEVE ESSERE $-1 \leq \frac{\xi}{\eta} \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{-\eta \leq \xi \leq \eta}$



IN QUESTO CASO ottengo

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \quad \left(\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right) \\ \vartheta = \frac{1}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{\xi}{\eta}\right) \qquad + \frac{\cancel{2}k\pi}{\cancel{2}} \end{array}}$$



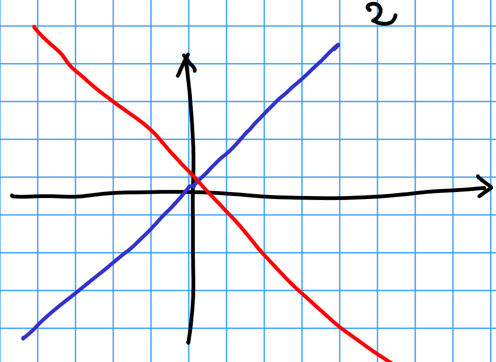
$\Rightarrow$ · SE $\frac{\xi}{\eta} = 1 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4} \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$

· SE $\frac{\xi}{\eta} = -1 \Rightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{4} \quad \vartheta = \frac{3}{4}\pi$

· SE $\frac{\xi}{\eta} \in]-1, 1[\Rightarrow$ QUATTRO VALORI DI θ

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\xi}{\eta}\right), \quad \theta_2 = \theta_1 + \pi$$

$$\vartheta_3 = \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{\xi}{\eta}\right)}{2}, \quad \vartheta_4 = \theta_3 + \pi$$



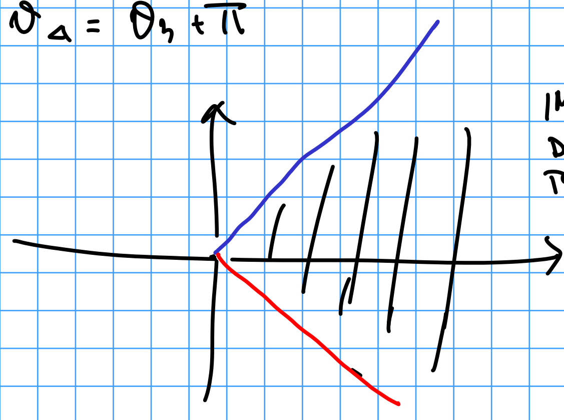
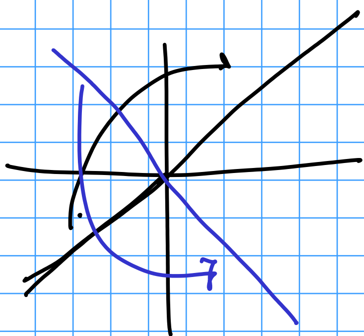
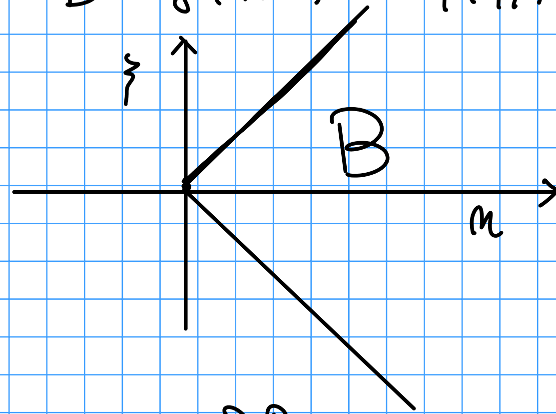


IMMAGINE DI $\mathbb{R}^2$ TRAMITE f

COME INTERPRETO TUTTO QUESTO:

• L'IMMAGINE $B = f(\mathbb{R}^2) = \{(\eta,\xi) : \eta \geq 0, -\eta \leq \xi \leq \eta\}$





• I PUNTI che vanno su ∂B sono le due rette

$x = y \qquad x = -y$ (uno va su $\xi = \eta$, l'altro su $\xi = -\eta$)

INOLTRE (x, x) e $(-x, x)$ → stesso punto

$(x, -x)$ e $(-x, x)$ → stesso punto

• I PUNTI INTERNI DI B provengono ognuno da quattro punti (x, y)

• Se guardo la Jacobiana $J_f(x,y)$ vedo che questo È DEGENERE SULLE RETTE $x = y$ $x = -y$ che "corrispondono a punti di piega"