Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 25 25/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

- Consideriamo

$$f(x,y) = (1+x-y)\ln(1-xy)$$

(a) VOGLIO IL POL. DI TAYLOR per f, in $P_0=(0,0)$, di grado 4

(b) VOGLIO $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = ??$

Ricordiamo lo sviluppo di $\ln(1+t)$ $(t \simeq 0)$ $\Big(t = \underbrace{-xy}_{\text{di 2° grado in }(x,y)}\Big)$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (\text{per } t \to 0) \qquad \left(\frac{o(t^2)}{t^2} \xrightarrow{t\to 0} 0\right)$$

$$\Rightarrow \ln(1-xy) = -xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(x^2y^2)$$

NOTO CHE $\boxed{x^2y^2 \le (x^2+y^2)^2(x^2+y^2)^2 = \|(x,y)\|^4}$

da cui

$$o(x^2y^2) = o(\|x,y\|^4) \qquad \text{INFATTI}$$

$$\left|\frac{o(x^2y^2)}{\|(x,y)\|^4}\right| = \left|\frac{o(x^2y^2)}{x^2y^2}\right|\underbrace{\left|\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|}_{\le 1} \le \left|\frac{o(x,y)}{x^2y^2}\right| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

INFATTI se $(x,y)\to(0,0) \Rightarrow x^2y^2 \to 0$

$$\Rightarrow \ln(1-xy) = -xy - \frac{x^2y^2}{2} + o\left(\|(x,y)\|^4\right)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = (1+x-y)\left(-xy - \frac{x^2y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^4)\right) =$$

$$-xy - \frac{x^2y^2}{2} - x^2y + xy^2 + o\left(\|(x,y)\|^4\right) \Rightarrow$$

$$\frac{x^3y^2}{2} \quad \frac{-x^2y^5}{2} + \dots$$

(a) $$\boxed{P_{4,(0,0)}(x,y) = -xy - x^2y + xy^2 - \frac{x^2y^2}{2}}$$

(b) Se guardo la formula $\Rightarrow$ SE $\alpha = (2,2)$

$$\frac{D_\alpha f(0,0)}{\alpha!} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2} = 2!\,2!\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

Dalla espressione di $P_{4(0,0)}(x,y)$ vedo anche che

- $\nabla f(0,0) = 0$
- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) = \frac{\partial^3}{\partial y^3} f(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(0,0) = (2,1)!(-1) = -2$$

$$\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x \partial y^2} = (1,2)!\,(1) = 2$$

TUTTE LE DERIVATE QUARTE SONO NULLE TRANNE $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$

$$f(x,y) = x^6 - 4x^2y + x^8 + 8y^2$$

CERCHIAMO I PUNTI CRITICI E CERCHIAMO DI CLASSIFICARLI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^5 - 8xy + 8x^7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2 + 16y$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = x^2 \\ 8x^7 + 6x^5 - 8xy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 8x^7 + 6x^5 - 2x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oppure} \quad 8x^4 + 6x^2 - 2 = 0$$

$$t = x^2 \Rightarrow 4t^2 + 3t - 1 = 0 \qquad t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4\cdot 4}}{8}$$

$$x^2 = t = \frac{-3 \pm 5}{8} = \begin{cases} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ -1 \end{cases} \qquad \boxed{x = \pm\frac{1}{2}}$$

← IMPOSSIBILE

DUNQUE TROVO $(0,0)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$

VEDIAMO LE DERIVATE II°

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x^4 - 8y + 56x^6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -8x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16$$

IN $(0,0)$ TROVO $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ HA DETERMINANTE 0

PROBLEMATICO !?

IN $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right) \Rightarrow H_f = \begin{bmatrix} \frac{30}{16} - \frac{1}{2} + \frac{56}{64} & \mp 4 \\ \mp 4 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \mp 4 \\ \mp 4 & 16 \end{bmatrix}$

$\det = 9\cdot 4 - 4\cdot 4 > 0 \qquad a_{11} > 0$ $\boxed{\text{MINIMI}}$

- PER TRATTARE IL PUNTO $(0,0)$ CERCHIAMO DI CAPIRE COME È FATTA LA LINEA DI LIVELLO $\boxed{f(x,y) = f(0,0)}$

$$x^6 - 4x^2y + x^8 + 8y^2 = 0 \qquad \text{è quadratico in } y$$

$$8y^2 - 4x^2y + (x^6 + x^8) = 0$$

$$y = \frac{2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - 8x^6 - 8x^8}}{8} = \frac{2x^2 \pm 2x^2\sqrt{1 - 2x^2 - 2x^4}}{8}$$

IL Δ è >0 per x piccolo : PIÙ PRECISAMENTE

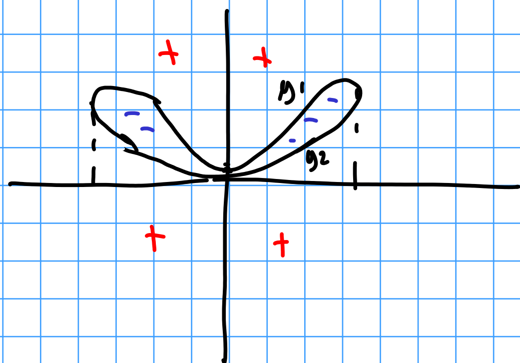
$$8x^4 + 8x^2 - 4 < 0 \iff 8t^2 + 8t - 4 < 0 \qquad (t = x^2)$$

equazione $\rightarrow$ $$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+32}}{8} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}}{8}$$

TROVO CHE $$0 \leq x^2 \leq \frac{4\sqrt{3}-4}{8}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{x^2}{4}\left(1 + \sqrt{1-2x^2-2x^4}\right) \\ y_2 &= \frac{x^2}{4}\left(1 - \sqrt{1-2x^2-2x^4}\right) \end{aligned}}$$

DEFINITE

$\simeq$ 

IL PUNTO $(0,0)$

NON È NÉ MAX NÉ MIN.

NOTARE CHE

$$f(x,0) = x^6 + x^8 \geqslant 0$$
$$f(0,y) = 8y^2 \geqslant 0$$

$\leftarrow$ NON È INCONTRASTO CON IL DISEGNO SOPRA

CONTINUIAMO CON LA TEORIA

PROBLEMA QUANDO L'INVERSA ESISTE ED È DIFFERENZIABILE

IPOTESI

HO LA SOLITA SITUAZIONE : $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $x_0 \in A$

$f : A \to \mathbb{R}^N$ (dim in partenza = dim. in arrivo)

SUPPONGO CHE $f \in C^1(A)$

DIMOSTREREMO CHE : SE $J_f(x_0)$ è invertibile

CIOÈ SE $\det(J_f(x_0)) \neq 0 \Rightarrow$

f è invertibile in un intorno di x_0 e

$$\boxed{J_{f^{-1}}(f(x)) = J_f(x)^{-1}} \quad \text{per } x \simeq x_0$$

o ANCHE $\quad J_{f^{-1}}(y) = J_f(f^{-1}(y)) \quad$ per $y \simeq y_0 = f(x_0)$

(Nel caso $N=1$ ritrovo il teorema noto $\displaystyle (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

PURCHÉ $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$)

Voglio dimostrare quanto sopra. Comincio con un risultato preliminare

<u>FATTO</u> Se $\phi : A \to \mathbb{R}^N$, A convesso e

$$\| J_\phi(x) \| \leq L \qquad \forall x \in A$$

($\| \ \|$ è la norma delle matrici: $\|M x\| \leq \|M\| \|x\| \quad \forall x$
ed è il più piccolo di questi costanti)

<u>ALLORA</u> ϕ verifica $\quad \| \phi(x_1) - \phi(x_2) \| \leq L \|x_1 - x_2\|$

<u>Dim</u> Uso Taylor secondo Lagrange:

$$\phi(x_2) = \phi(x_1) + J_\phi(t x_2 + (1-t) x_1)(x_2 - x_1)$$

per $t \in]0,1[$

$$\Leftrightarrow \| \phi(x_2) - \phi(x_1) \| = \| J_\phi(t x_2 + (1-t)x_1)(x_2 - x_1) \| \leq$$
$$\| J_\phi(\text{——}) \| \, \|x_2 - x_1\| \leq L \|x_2 - x_1\|$$

(è falso se A non è convesso)

<u>TEOREMA DI INVERSIONE LOCALE</u>

$f : A \to \mathbb{R}^N$, A aperto, $f \in C^1(A)$, $x_0 \in A$, $\det J_f(x_0) \neq 0$

<u>ALLORA</u> $\exists \rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subset A$ e

(a) f è iniettiva su $B(x_0, \rho)$

(b) $\Omega_1 := f(B(x_0, \rho))$ È APERTO IN $\mathbb{R}^N$

A questo punto è ben definito $f^{-1}: \Omega_1 \to B(x_0, \rho)$. VALE

(c) f^{-1} è di classe C^1 e si ha

MATRICE INVERSA

$$J_{f^{-1}}(y) = J_f(f^{-1}(y))^{-1} \qquad \forall y \in \Omega_1$$

<u>Dim.</u> (1) Posso prendere $\rho_0 > 0$ in modo che $B(x_0, \rho_0) \subset A$ e

$$(\star) \qquad \| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in B(x_0, \rho_0)$$

MATRICE IDENTICA

SO CHE ESISTE

Lo posso fare perché la matrice $I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x)$ fa <u>ZERO</u> quando $x = x_0$ (VIENE $I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x_0) = I - I = 0$)
INOLTRE (essendo f C^1), questa matrice dipende con continuità da x. $\Rightarrow$ $\| I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x) \|$ è continua e fa zero in $x = x_0$

DUNQUE TROVO $\rho_0 > 0$ per cui vale $(\star)$

(2) Se chiamo $\phi(x) = x - J_f(x_0)^{-1} f(x)$ $\Rightarrow$
$$J_\phi(x) = I - J_f(x_0)^{-1} J_f(x)$$
Per la $(\star)$ e per il risultato di prima

$$(\star\star) \qquad \| \phi(x_2) - \phi(x_1) \| \leq \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \| \qquad \text{SE } x_1, x_2 \in B(x_0, \rho_0)$$

(3) Se $x_1, x_2 \in B(x_0, \rho_0)$

$$\| J_f(x_0)^{-1} (f(x_2) - f(x_1)) \| = \| \phi(x_2) - \phi(x_1) - (x_2 - x_1) \|$$
$$\geq -\frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \| + \| x_2 - x_1 \| = \frac{1}{2} \| x_2 - x_1 \|$$

($\|a + b\| \geq \|b\| - \|a\|$; segue da $\|b\| = \|b + a - a\| \leq \|b + a\| + \|a\|$)

Dato che $\| J_f(x_0)^{-1} (f(x_2) - f(x_1)) \| \leq \| J_f(x_0)^{-1} \| \, \| f(x_2) - f(x_1) \|$

OTTENGO $\boxed{\| f(x_2) - f(x_1) \| \geq \frac{1}{2} \frac{\| x_2 - x_1 \|}{\| J_f(x_0)^{-1} \|}}$ (se $x_2, x_1 \in B(x_0, \rho_0)$)

HO TROVATO CHE f è INIETTIVA:

È ben definita $f^{-1}: \Omega_1 \to B(x_0, \rho_0)$ dove $\Omega_1 = f(B(x_0, \rho_0))$

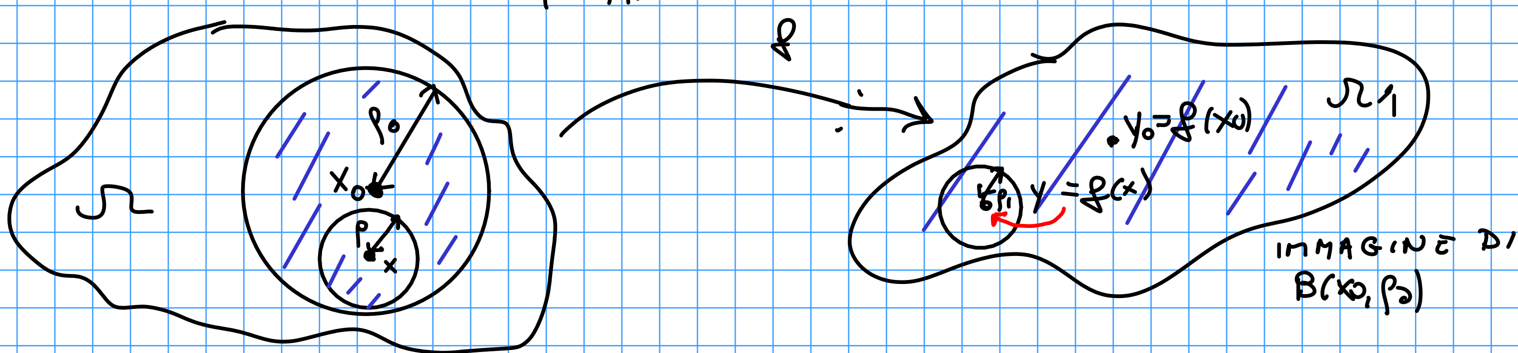
VALE $\quad \|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)\| \leq 2 \|J_f(x_0)^{-1}\| \, \|y_2 - y_1\|$

(USO LA FORMULA SOPRA con $y_2 = f(x_2)$, $y_1 = f(x_1)$)

$\Rightarrow f^{-1}$ è CONTINUA

(4) RIMANE DA DIMOSTRARE CHE Ω_1 È APERTO (e f^{-1} diff.)

- Prendo $y \in \Omega_1$. DUNQUE ESISTE ! $x \in B(x_0, \rho_0)$ con $y = f(x)$
- Posso prendere $\rho > 0$ in modo che $\overline{B(x, \rho)} \subset B(x_0, \rho_0)$
- Prendo $\rho_1 = \dfrac{\rho}{2\|J_f(x)\|^{-1}}$ e $y' \in B(y, \rho_1)$



VOGLIO DIM. CHE $B(y, \rho_1) \subset \Omega_1$ CIOÈ

$$\forall y' \in B(y, \rho_1) \quad \exists x' \in B(x, \rho) : \quad f(x') = y'.$$

Sia dunque $y' \in B(y, \rho_1)$ e CONSIDERO $\phi_{y'} : \overline{B(x, \rho)} \to \mathbb{R}^N$

$$\phi_{y'}(x') = x' - J_f(x_0)^{-1}(f(x') - y')$$

(Noto che $\phi_{y'} = \phi + J_f(x_0)^{-1} y'$: $\phi_{y'}$ differisce da ϕ per una costante)

RAGIONANDO COME PRIMA VEDO CHE

$$\|\phi_{y'}(x') - \phi_{y'}(x'')\| \leq \frac{1}{2} \|x' - x''\|$$

$$\phi_y(x) = x$$

ALLORA $\quad \|\phi_{y'}(x') - x\| = \|\phi_{y'}(x') - \phi_y(x)\| \leq$

$$\|\Phi_{y'}(x') - \Phi_{y'}(x)\| + \|\Phi_{y'}(x) - \Phi_y(x)\| \leq$$

$$\frac{1}{2}\|x'-x\| + \|J_f(x_0)^{-1}\| \, \|y'-y\| \leq \frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2} \leq \rho$$

QUESTO CONTO MOSTRA CHE

$$\Phi_{y'} : \overline{B(x,\rho)} \to \overline{B(x,\rho)}$$

Dato che Φ_y è lipschitziana di coeff. 1/2 e manda $\overline{B(x,\rho)}$ in sé posso APPLICARE IL TEOR. DELLE CONTRAZIONI $\Rightarrow$

$\exists\, x' \in B(x,\rho)$ tale che $\Phi_y(x') = x' \iff$

$$\Phi_{y'}(x') = x' - J_f(x_0)^{-1}(f(x')-y') = x'$$

$$\iff J_f(x_0)^{-1}(f(x')-y') = 0$$

$$\iff f(x') = y' \quad \leftarrow \boxed{\text{TESI}}$$

HO TROVATO x' TALE CHE $f(x)=y'$

QUINDI Ω_1 è aperto

(5) Ci sarebbe da dim. che $f^{-1} : \Omega_1 \to A$ è C^1 e vale la formula. NON FACCIAMO QUESTA DIM

Notiamo però che – SE HO DIMOSTRATO CHE f è C^1 –

$\Rightarrow \quad f^{-1} f(x) = x \quad$ & passando agli Jacobiani

$$J_{f^{-1}}(f(x)) \cdot J_f(x) = I_d$$

& MI DA' LA FORMULA

FINE