Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 24 20/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$f(x,y,z) = (x+y+2z)\, e^{xy+1}$. Scrivere il polinomio di grado $k=3$ nel punto $P_0 = (0,0,0)$ (rispetto a $(x-1)$, $(y-1)$, $(z+1)$)

$$P(x,y,z) = P_{3,P_0}(x,y,z)$$

SE USASSI LA DEF. DOVREI CALCOLARE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI 0°, I°, II°, III° in P_0. CERCHIAMO UN ALTRO MODO USANDO GLI SVILUPPI DI TAYLOR NOTI da Analisi I

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$$

$$\underbrace{e^{1+xy}} = e^1 e^{xy} = e\,(1 + xy + o(xy)) \leftarrow \text{MI POSSO FERMARE QUA}$$

(ho bisogno un'espressione di 2° grado in (x,y,z))

$$= e\left(1 + xy + \frac{x^2y^2}{2} + o(x^2y^2)\right)$$

$$= e \dots$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = (x+y+2z)\, e\,(1+xy+o(xy)) =$$

$$e\,(x+y+2z + x^2y + xy^2 + 2xyz + \underbrace{(x+y+z)\,o(xy)}_{\text{sarà } o(\|(x,y,z)\|^3)})$$

??

IN EFFETTI $(x+y+2z)\,\sigma(xy) = \sigma((x+y+2z)xy)$

INOLTRE $|(x+y+z)xy| \leq$ $\qquad P=(x,y,z)$

$$(|x|+|y|+|2z|)|xy| \leq$$

$$\leq \Big(\underbrace{\|P\|+\|P\|+2\|P\|}_{4\|P\|}\Big)\Big(\underbrace{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}}_{\frac{\|P\|^2}{2}}\Big) = 2\|P\|^3$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sigma((x+y+z)xy)}{\|(x,y,z)\|^3}\right| = \left|\frac{\sigma((x+y+z)xy)}{(x+y+z)xy}\right|\underbrace{\left|\frac{(x+y+z)xy}{\|(x,y,z)\|^3}\right|}_{\leq 2}$$

$$\leq \left|\frac{\sigma((x+y+z)xy)}{(x+y+z)xy}\right| \cdot 2 \longrightarrow 0$$

per def. di $\sigma(\cdot)$

QUINDI

$$P(x,y,z) = e\,(\underbrace{x+y+2z+x^2y+xy^2+2xyz}_{\text{Polinomio di } \mathrm{III}^\circ \text{ grado}})$$

$$f(x,y,z) = P(x,y,z) + o(\|x,y,z\|^3)$$

A QUESTO PUNTO POSSO RICAVARE QUANTO FANNO LE DERIVATE (fino alla 3^a) in P_0. $\underline{C(0,\varepsilon)}$

- $f(\vec{0}) = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0}) = e \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0}) = e \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{0}) = 2e$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{0}) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{0}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{0})$

($P(x,y,z)$ non contiene termini di II° grado)

- Vediamo le derivate terze: Prendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ di lunghezza 3 : $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3$. So CHE i termini di grado 3 sono $\sum_{|\alpha|=3} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}(x,y,z)^\alpha$

• $\alpha = (3,0,0) \to \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0)\, x^3 = 0$ (non c'è x^3 in $P(x,y,z)$)

• $\alpha = (0,3,0)$

• $\alpha = (0,0,3)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(0) = 0$ (non ci sono neanche y^3, z^3)

• c'è IL TERMINE $x^2 y$ che corrisponde a $\alpha = (2,1,0)$

$\Rightarrow$ $e\, x^2 y = \frac{1}{2!\,1!\,0!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0)\,(x,y,z)^{(2,1,0)} \iff \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0) = 2}$

• Analogamente $\boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0) = 2e}$ (corrisponde a $\alpha = (1,2,0)$)

• INFINE il termine $2e\, xyz$ corrisponde a $\alpha = (1,1,1)$

$\Rightarrow$ $2e = \frac{1}{1!\,1!\,1!}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(0) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} f(0) = 2e}$

FACCIAMO LO STESSO CALCOLO IN $\boxed{P_0 = (1,-1,0)}$

$e^t = 1 + t + o(t)$ $(t \to 0)$

RIFATTO SOTTO

$e^{1+xy} = 1 + (1+xy) + o(1+xy)$ NOTA: $1+xy \to 0$ se $(x,y,z) \to P_0$

$\Rightarrow$ $= 2 + (x-1+1)(y+1-1) + o(1+xy) =$

$= 2 + (x-1) + (y+1) - 1 + (x-1)(y+1) + o(1+xy)$

$= 1 + (x-1) + (y+1) + (x-1)(y+1) + o(1+xy)$

$\Rightarrow$ $f(x,y,z) = (x+y+2z)\, e^{1+xy}$ $P_0 = (1,-1,0)$

Cercare il polinomio di Taylor $P(x,y,z) = P_{3,P_0}(x,y,z)$. (*)

Conviene esprimere f in termini di $x' = (x-1)$, $y' = (y+1)$ z:

$f(x,y,z) = ((x-1) + (y-1) + 2z)\, e^{1 + [(x-1)+1][(y+1)-1]} =$

$((x-1) + (y-1) + 2z)\, e^{-(x-1)+(y+1)+(x-1)(y+1)}$

$(x' + y' + 2z)\, e^{-x'+y'+x'y'}$ (per $(x',y',z) \simeq (0,0,0)$)

NOTA: $-x' + y' + x'y' \simeq |x'| + |y'| \le \|(x',y',z)\|$. Uso lo sviluppo di e^t

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \Rightarrow e^{-x'+y'+x'y'} = 1 - x' + y' + x'y' + \frac{1}{2}(-x'+y'+x'y')^2$$

$$+ o(-x'+y'+x'y') = 1 - x' + y' + x'y' + \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}x'y' + o(\|(x',y',z)\|^2) =$$

$$= 1 - x' + y' + \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}x'y' + o(\|(x',y',z)\|^2) \Rightarrow$$

$$(x'+y'+2z)\, e^{-x'+y'+x'y'} = x' + y' + 2z - (x')^2 - \cancel{x'y'} - 2x'z + \cancel{x'y'} + (y')^2 + 2y'z + \frac{1}{2}(x')^3 +$$

$$+ \frac{1}{2}(x')^2 y' + (x')^2 z + \frac{1}{2}x'(y')^2 + \frac{1}{2}(y')^3 + (y')^2 z + \frac{1}{2}(x')^2 y' + \frac{1}{2}x'(y')^2 + x'y'z' + o(\|(x',y',z)\|) =$$

$$\underbrace{x' + y' + 2z - (x')^2 + (y')^2 - 2x'z + 2y'z + \frac{1}{2}(x')^3 + (x')^2 y' + (x')^2 z + x'(y')^2 + x'y'z' + \frac{1}{2}(y')^3 + (y')^2 z}_{P(x',y',z)} + \boxed{+\,o(\|\ \ \|^3)}$$

(devo poi mettere $x' = (x-1)$ $y' = (y+1)$)

Da questa espressione ricavo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 1 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 1 \;;\; \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = -2 \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2 \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P_0) = 0 \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 0 \;;\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(P_0) = -2 \;,\; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P_0) = 2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0) = \frac{3!}{2} = 3 \;;\; \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(P_0) = 3 \;;\; \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(P_0) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(P_0) = 2! \cdot 1 = 2 \;,\; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(P_0) = 2 \;,\; \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(P_0) = 2! \cdot 1 = 2 \;;\; \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(P_0) = 1 \;;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(P_0) = 0 \;;\; \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(P_0) = 2! \cdot 1 = 2 \;;\; \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(P_0) = 0$$

X VERSIONE CORRETTA (rispetto a quella vista a lezione)

ALTRO ESERCIZIO DI QUESTO TIPO

$$f(x,y,z) = (1 - x - y + xy)\, e^{x+y+z}$$

- Voglio $P_{3,P_0}(x,y,z) = P(x,y,z)$, dove $P_0 = (1,1,-2)$
- Voglio $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(P_0)$ $\quad \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(P_0)$

· Scriviamo f in termini di $(x-1,\ y-1,\ z+2)$

$$f(x,y,z) = \big(1-(x-1+1)-(y-1+1)+(x-1+1)(y-1+1)\big)\cdot e^{(x-1+y-1+z+2)} =$$

$$\big(\cancel{1}-\cancel{(x-1)}-\cancel{1}-\cancel{(y-1)}-\cancel{1}+\underbrace{(x-1)(y-1)}_{\text{grado 2}}+\cancel{(x-1)}+\cancel{(y-1)}+\cancel{1}\big)\cdot e^{(x-1)+(y-1)+(z+2)}$$

$t=(x-1)+(y-1)+(z+2)$ $\quad (t\to 0$ se $P\to P_0)$

Basta usare $e^t = 1+t+o(t)$ $\Rightarrow$

$$f(x,y,z) = (x-1)(y-1)\left[1+(x-1)+(y-1)+(z+2)+o(\|P-P_0\|)\right] =$$

$$(x-1)(y-1)+(x-1)^2(y-1)+(x-1)(y-1)^2+(x-1)(y-1)(z+2) + o(\|P-P_0\|^3)$$

$P_3(x,y,z)$ (in P_0)

· Ne ricavo $\nabla f(P_0)=0$ $\qquad H_f(P_0)\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$\left(\frac{1}{(1,1,0)!}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1\right)$$

· $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(P_0)$ corrisponde a $\alpha=(2,1,0)$ $\qquad \alpha! = 2$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(P_0) = 1 \qquad \boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(P_0) = 2}$$

· $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(P_0)$ corrisponde a $\alpha=(1,1,1)$ $\qquad \alpha! = 1$

$$\boxed{\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}(P_0) = 1}$$

· $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ differenziabile con $\nabla f(0) = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ $\qquad \gamma(t) = (1+\cos(t),\ \sin(t),\ t-\pi)$

PONIAMO $\phi(t) = f(\gamma(t))$

?? $\phi'(\pi) = $??

VEDO $\gamma(\pi) = (1+\cos(\pi), \sin(\pi), \pi-\pi) = (0,0,0)$

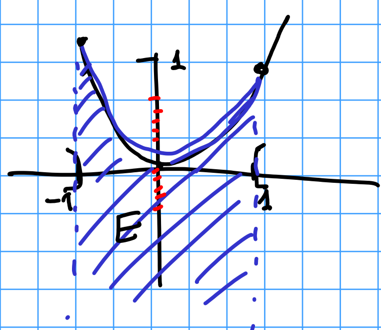
$\gamma(\pi) = \mathbf{0} = (0,0,0)$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \implies$$

$$\phi'(\pi) = \nabla f(\gamma(\pi))\cdot\gamma'(\pi) = \nabla f(\mathbf{0})\cdot \gamma'(\pi)$$

$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \implies$ VIENE $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = 2+3 = 5$

L'insieme $E=\{(x,y): |x|<1, y\le x^2\}$ è aperto ?? $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$



$\partial E = \{x=-1, y\le 1\} \cup$
$\{x=1, y\le 1\} \cup$
$\{-1\le x\le 1, y=x^2\}$

- Se E fosse aperto $\partial E \cap E = \emptyset$

- E non è aperto $\iff \exists P_0$ di frontiera con $P_0 \in E$

PER ESEMPIO $P_0=(0,0) \in E$

$P_0 \in \partial E$ perché i punti

VICINI a $(0,0)$ quanto voglio se $|y|$ piccolo
$\left\{\begin{array}{l}(0,y) \text{ con } y \le 0 \text{ sono in } E\\ (0,y) \text{ con } y > 0 \text{ non sono in } E\end{array}\right.$

$$f(x,y) = \frac{x^2+x^2y^2+y^2}{x^2+y^2} \quad \text{se } (x,y)\neq 0$$

DIMOSTRARE che f ha limite se $(x,y)\to(0,0)$ e trovare il limite. ℓ

① Chi può essere ℓ?

faccio $f(x,0) = \dfrac{x^2 + x^2 \cdot 0 + 0^2}{x^2 + 0^2} = 1 \quad (x \neq 0)$

se ℓ esiste $\boxed{\ell = 1}$

Quindi devo dim. che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(f(x,y) - 1\right) = 0 \iff$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} = 0 \qquad \text{segno della diseg.}$$

$$|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \Rightarrow x^2 y^2 \leq \frac{\|(x,y)\|^4}{4}$$

$$|f(x,y) - 1| \leq \frac{1}{4}\|(x,y)\|^2 \to 0$$

Definisco $f(0,0) = 1$ (f risulta continua)

DOMANDA f è differenziabile ??

Proviamo a dim. che lo è.

Se derivo in x e y in $(0,0)$ trovo:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\dfrac{x^2 + x^2 \overset{=0}{y^2} + \overset{=0}{y^2}}{x^2 + \underset{=0}{y^2}} - 1\right)}_{\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{x^2} - 1\right) = \frac{1}{x}\cdot 0 = 0} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{tende a } 0$

- ANALOGAMENTE $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow \boxed{\overset{\text{SE ESISTE}}{df(0,0) = 0}}$

DUNQUE SE VOGLIO DIM. LA DIFFERENZIABILITÀ DEVO DIM.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0\cdot x - 0\cdot y}{\|(x,y)\|} = 0$$

CIOE'

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

VERO dato che $x^2y^2 \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$ TORNA