Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 23 19/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

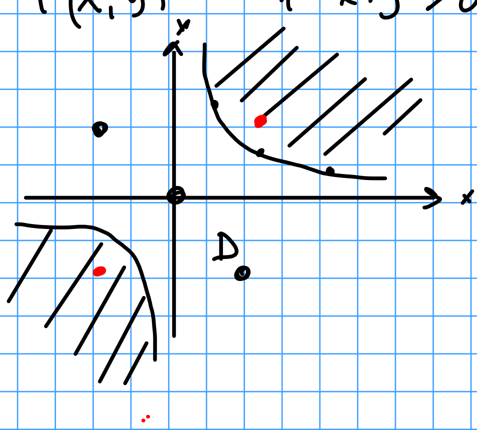
Esercizio ( dal compitino 2017)

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2\ln(1-xy)$$

(a) DOMINIO :

(b) trovare e classificare i pti stazionari (c) . . .

(a) $\mathrm{Dom} = \{(x,y) : 1-xy > 0\} = \{ xy < 1 \} =: D$



OSS. ( servirà per la parte c) )

(i) $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty}$ se $x_0 y_0 = 1$ (per motivi ovvi argomento del $\ln(\cdot)$ tende a zero . . .)

(ii) $\boxed{\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty}$ USIAMO LA SOLITA DISEG

$$|xy| \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \iff -\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2} \le xy \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$$

Dunque $f(x,y) \ge x^2+y^2-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right) =$

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\|^2-\ln\left(1+\frac{1}{2}\|(x,y)\|^2\right)$$

Dato che $\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2}-\ln\left(1+\frac{t^2}{2}\right)=+\infty \Rightarrow \lim_{(x,y)\to\infty} \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2-\ln\left(1+\frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=+\infty$$

(b) Cerco i punti stazionari:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+y-\frac{2}{1-xy}(-y) = 2x \quad +\frac{2y}{1-xy} = 2x+\frac{3-xy}{1-xy}\,y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y+x+\frac{2x}{1-xy} = 2y+\frac{3-xy}{1-xy}\,x$$

DEVO RISOLVERE IL SISTEMA

$$\begin{cases} 2x+\frac{3-xy}{1-xy}\,y=0 \\ \frac{3-xy}{1-xy}\,x+2y=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}\frac{3-xy}{1-xy}\,y = \left(-\frac{1}{2}\frac{3-xy}{1-xy}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{3-xy}{1-xy}\right)x$$

$$= \left(\frac{1}{2}\frac{3-xy}{1-xy}\right)^2 x$$

$\Rightarrow$ $x=0$ OPPURE $\left(\frac{1}{2}\frac{3-xy}{1-xy}\right)^2=1 \iff \frac{1}{2}\frac{3-xy}{1-xy}=\pm 1$

Metto queste condizioni nel sistema:

(A) $x=0 \Rightarrow y=0$ VEDO CHE $(0,0)$ è pto critico

(B) $\begin{cases} \dfrac{3-xy}{1-xy} = 2 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ \dfrac{3+x^2}{1+x^2} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ 3+x^2 = 2+2x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ x^2=1 \end{cases}$

TROVO $(1,-1)$ e $(-1,1)$ (sono nel dominio dato che $xy=-1<1$)

(C) $\begin{cases} \dfrac{3-xy}{1-xy} = -2 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{1-x^2} = -2 \\ y=x \end{cases} \iff \begin{cases} 3-x^2 = -2+2x^2 \\ y=x \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2=5 \\ y=x \end{cases}$

$x^2 = \frac{5}{3} > 1 \quad y = x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} > 1 \qquad xy = \frac{5}{3} > 1 \notin$ DOM.

IN TUTTO HO TRE PUNTI

$(0,0) \qquad (1,-1) \qquad (-1,1)$

Calcolo gli Hessiani:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + y\,\frac{(-y)(1-xy)-(3-xy)(-y)}{(1-xy)^2} = 2 + \frac{2y^2}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 + \frac{(3-2xy)(1-xy)-(3y-xy^2)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{3-2xy+x^2y^2}{(1-xy)^2}$$

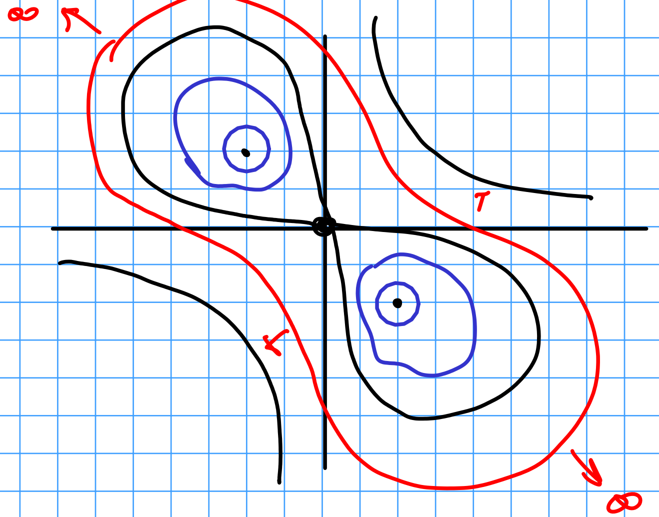
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{2x^2}{(1-xy)^2} \qquad \text{(scambio } x \text{ e } y \ldots)$$

ALLORA • $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$ det $<0$ PTO DI SELLA

• $H_f(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 + \dfrac{2(-1)^2}{(1+1)^2} & \dfrac{3+2+1}{(1+1)^2} \\ \dfrac{3+2+1}{(1+1)^2} & 2 + \dfrac{2(1)^2}{(1+1)^2} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 2+\frac{1}{2} & \frac{6}{4} \\ \frac{6}{4} & 2+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

det $>0$, $a_{11}>0$ PTO DI MINIMO



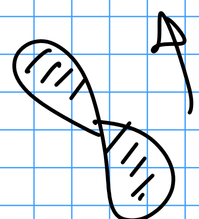
IDEA QUALITATIVA DELLE LINEE DI LIVELLO

$$f(0,0) = 0$$

$$f(1,-1) = \underbrace{1+1-1 - \ln(1+1)}_{<0} = 1-\ln(2)$$

(c) Si dica se $M = \{ f(x,y) \leq 0 \}$ è LIMITATO

**SÌ** perché $f \to \infty$ su $\partial$ Dominio

$M =$ 

---

CONSIDERIAMO

$f(x,y)$ tale che

$$P(x,y) = P_{3,P_0}(x,y) = 5 + (x-1)(y+1) + (x-1)^3 - (x-1)(y+1)^2 + 4(y+1)^2$$

Pol. di Taylor di grado 3 in $P_0 = (1,-1)$

(a) $P_0$ è pt stazionario ??

$\boxed{\text{SÌ}}$ perché $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$

perché $P(x,y)$ NON HA termini di grado 1

(b) $P_0$ è di max / min / sella ??

Dalla forma di $P(x,y)$ RICAVO:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 0$$

perché il pezzo di II° grado è

$$(x-1)(y+1) = \frac{1}{2} H_f(P_0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}^2$$

$$H_f(P_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ $P_0$ di SELLA

(c) $$\frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x \partial y^2} = ??$$ (devo guardare il coeff. del termine in $(x-1)(y+1)^2$)

CIOÈ :

$$\frac{1}{(1,2)!} \frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x \partial y^2} = -1 \iff$$

$$\frac{\partial^3 f(P_0)}{\partial x \partial y^2} = -1\,(1!\,2!) = -2$$

CONTROLLARE