Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 21 13/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Def.
- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ è un "N-multi indice" ($\alpha_i \in \mathbb{N}$)
- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ LUNGHEZZA DI α
- Se $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ $\vec{v}^{\,\alpha} := v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \cdots v_N^{\alpha_N}$
- Se $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$ chiamo

$$D_\alpha f(x) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}} \qquad m = |\alpha|$$

Per esempio $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f = D_\alpha f$ dove $\alpha = (2,1)$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x} f \overset{\text{"}}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \quad \text{se } f \text{ è } C^3(A) \right)$$

CURIOSITÀ Con la nozione di multi indice si può scrivere la generalizzazione del binomio di Newton, cioè:

$$(x_1 + x_2 + \dots x_N)^m = \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ (\alpha \text{ N-multiindici})}} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha \qquad x = (x_1 \dots x_N)$$

Se $N = 2$ ritrovo il binomio di Newton:

$$(a+b)^m = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=m} \frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2} = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} a^k b^{m-k}$$

$(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha$ è 2-multiindice (se $\alpha_1+\alpha_2=m$ $\alpha_2=m-\alpha_1$)

CON LE NOTAZIONI SOPRA SI HA ($f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^m, $x_0 \in A$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$)

se $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$ è $C^m(\mathbb{R})$ e vale

$$\varphi'(0) = f^{(m)}(x_0)(\underbrace{\vec{v}, \vec{v}, \dots, \vec{v}}_{m}) = f^{(m)}(x_0)(\vec{v}^{\,m}) =$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, \vec{v}^{\,\alpha}$$

Nel caso $m=3$ $N=2$ ho

$$f^{(3)}(x_0)(\vec{v}^{\,3}) = \sum_{i,j,k=1}^{N} \underbrace{\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}}_{\text{ce ne sono tanti che si possono raggruppare}} v_i\, v_j\, v_k =$$

$$= \sum_{|\alpha|=3} \frac{3!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, \vec{v}^{\,\alpha}$$

ce ne sono tanti che si possono raggruppare: $\underbrace{\frac{\partial}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2 \partial y}}_{\text{3 termini di } f_y}$

corrisponde a $\alpha = (2,1)$

il termine $v_1^2 v_2$ deve avere un coeff. 3

Se, come detto, $N=2$

ho questo multiindice con $|\alpha|=3$

$(3,0)$ $(2,1)$ $(1,2)$ $(0,3)$

$\frac{\partial^3}{\partial x^3}$ $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$ $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$ $\frac{\partial^3}{\partial y^3}$ $\Rightarrow f'''(x_0)(\vec{v}) =$ $\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\right)$

$$\underbrace{\frac{3!}{(3,0)!}}_{\frac{3!}{3!\,0!} = 1} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^3} v_x^3 + \underbrace{\frac{3!}{(2,1)!}}_{\frac{3!}{2!\,1!} = 3} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^2 \partial y} v_x^2 v_y + \underbrace{\frac{3!}{(1,2)!}}_{3} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x \partial y^2} v_x v_y^2 + \underbrace{\frac{3!}{(0,3)!}}_{1} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial y^3} v_y^3$$

USANDO QUESTI MULTINDICI POSSO SCRIVERE

$$\frac{d}{dt^n} f(x_0 + t\vec{v}) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)\, \vec{v}^{\,\alpha}$$

[$\frac{n!}{\alpha!}$ si può chiamare "coefficiente multinomiale"

(BINOMIALE $\to$ N=2)]

USANDO QUESTE FORMULE POSSO RIFARE LE DIM. SULLA FORMULA DI TAYLOR CON n al posto di 2. Tutto si riduce ad applicare la formula di Taylor unidimensionale alla funzione

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)) \qquad (\text{Dati } x_0 e x)$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot t + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

SI OTTENGONO DUE TEOREMI

Def CHIAMO POLINOMIO DI TAYLOR di grado n rispetto al punto x_0, il polinomio

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha|\le n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha f(x_0)(x-x_0)^\alpha$$

TEOR. (TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE)

Suppongo A aperto convesso in $\mathbb{R}^N$. $f: A \to \mathbb{R}$ di classe $C^n(A)$, $x_0 \in A \Rightarrow \forall x \in A\ \exists\, \xi_x$ sul segmento tra x e x_0 tale che

$$f(x) = P_{n-1,x_0}(x) + \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} D_\alpha(\xi_x)(x-x_0)^\alpha$$

TEOR. (TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

A aperto $f: A \to \mathbb{R}$ di classe $C^n(A)$ $x_0 \in A \Rightarrow$

$$f(x) = P_{m,x_0}(x) + \sigma(x) \quad \text{dove}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sigma(x)}{\|x-x_0\|^n} = 0 \quad \left(\sigma(x) = o(\|x-x_0\|^n) \right)$$

PER ESEMPIO $m=3$ $N=2$

PEANO $\to$ $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0)(y-y_0)^2 +$$

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial y^3}(x_0,y_0)(y-y_0)^3 \quad + o\left(\| \quad \|^3\right)$$

ESERCIZI SUI PUNTI CRITICI (e discussi collegati)

(A) E' UN POLINOMIO IN (x,y) di grado 4

$$f(x,y) = 3x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 12xy^3 + 6y^4 - 8y^3 + 2y^2 + 24y$$

Questa f va da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (dominio $= \mathbb{R}^2$). E' di classe C^∞ (C^2!!)

- CALCOLO derivate I° e II°

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 12y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^3 + 12x^2y + 36xy^2 + 24y^3 - 24y^2 + 4y + 24$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 36x^2 + 24xy + 12y^2 \;;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2 + 24xy + 36y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x^2 + 72xy + 72y^2 - 48y + 4$$

- CERCO I PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0 \iff \boxed{y = -x} \\ 4x^3 + 12x^2y + 36xy^2 + 24y^3 - 24y^2 + 4y + 24 = 0 \end{cases}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

$$\boxed{x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)}$$

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

$$(x-y)\underbrace{(x+y)(x^2+y^2)}$$

si annulla per $\boxed{x = -y}$

METTO $y = -x$ NELLA SECONDA RIGA: $\Rightarrow$

$$\underbrace{4x^3 - 12x^3 + 36x^3 - 24x^3} - 24x^2 - 4x + 24 = 0$$

$$4x^3 - 24x^2 - 4x + 24 = 0$$

$$x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$$

$x = 1$ RISOLVE!!

USIAMO RUFFINI

	1	−6	−1	6
1		1	−5	−6
	1	−5	−6	0

$$(x-1)(x^2 - 5x - 6) = (x-1)(x+1)(x-6)$$

RADICI $\frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} = 6, -1$

TROVO TRE PUNTI CRITICI

$(1, -1)$ $(-1, 1)$ $(6, -6)$

CALCOLO LE MATRICI HESSIANE IN QUESTI PUNTI

$$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 64 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\det > 0 \quad a_{11} > 0 \quad (1,-1) \text{ PTO DI MINMO}}$

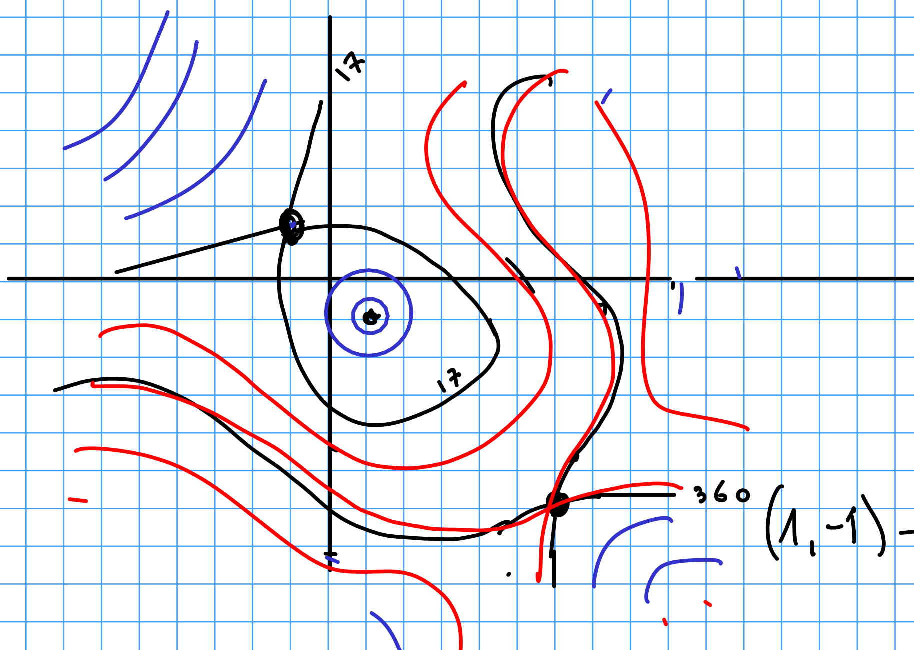
$$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} 24 & 24 \\ 24 & -32 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\det < 0 \quad (-1,1) \text{ PTO DI SELLA}}$

$$Hf(6,-6) = \begin{bmatrix} 36\cdot 24 & 36\cdot 24 \\ 36\cdot 24 & 20\cdot 36+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 864 & 864 \\ 864 & 724 \end{bmatrix}$$

$\det < 0$

$\boxed{(6,-6) \text{ PTO DI SELLA}}$



$f(1,-1) = -15$

$f(-1,1) =$

$f(6,-6) =$

$(1,-1) \to 3 - 4 + \cancel{6} - \cancel{12} + \cancel{6} + 8 + 2 - 24 = -15$

$$(-1,1) \to 3 - 4 + 6 - 12 + 6 - 8 + 2 + 24 = 41 - 24 = 17$$

$$(6,-6) \to 3\cdot 6^4 - 4\, 6^4 + 6\, 6^4 - \ \ldots = 360$$

LE LINEE DI LIVELLO CHE HO TENTATO DI DISEGNARE SUGGERISCONO CHE

<u>NON VALE</u> $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$

Dovrebbero esserci delle direzioni su cui $f \to -\infty$

Proviamo a fare $f(t\vec{v}) = f(tv_x, tv_y) =$

$$t^4\left(3v_x^4 + 4v_x^3 v_y + 6v_x^2 v_y^2 + 12 v_x v_y^3\right) + \underbrace{t^3 \cdots}_{\text{termini di grado } <4}$$

$$= t^4 \Delta(v_x, v_y) + \text{potenze} < 4$$

$$\Delta(v_x, v_y) = 3v_x^4 + 4v_x^3 v_y + 6v_x^2 v_y^2 + 12 v_x v_y^3$$

PROVO $v_x = 1 \quad v_y = -1 \implies \Delta = 3 - 4 + 6 - 12 < 0$

DUNQUE

$$\lim_{t\to+\infty} f(t, -t) = -\infty$$

HO TROVATO UNA RETTA SU CUI $f \to -\infty$

SE PERÒ METTO $v_x = 1 \quad v_y = 1$ TROVO

$$\Delta = 3 + 4 + 6 + 12 > 0 \implies \boxed{f \text{ NON HA LIMITE A } \infty}$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t,t) = +\infty$$

$(1,-1)$ NON È MINIMO ASSOLUTO

PROPOSIZIONE UTILE Se $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e

$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ allora per qualunque $c \in \mathbb{R}$

il "SOTTOLIVELLO" $M_c = \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \le c\}$

È LIMITATO

(o l'insieme di livello $\{x : f(x) = c\}$)

SE NON FOSSE LIMITATO TROVEREI PUNTI GRANDI IN $M_c \implies \exists\, x_n \in M_c$ tali che $\|x_n\| \to \infty$

IN ALTRI TERMINI TROVO UNA (x_n) tale che

$$\|x_n\| \to +\infty \qquad f(x_n) \le c \qquad (\text{o } f(x_n) = c)$$

QUESTO È IN CONTRASTO CON $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

(da questo limite si ricava che $\forall\, (x_n)$ con $\|x_n\| \to \infty$ deve succedere $f(x_n) \to +\infty$)

ESEMPIO (dall'altra volta)

$$f(x,y) = 4x^4 + 4xy + 2y^2$$

Abbiamo visto che $\lim_{(x,y) \to \infty} f(x,y) = +\infty$

ALLORA

$$M := \{ 4x^4 + 4xy + 2y^2 \le 1 \} \quad \text{È LIMITATO}$$

$\neq \emptyset$ perché $(0,0) \in M$

potrei metterci un qualunque c (naturalmente per certi c troppo bassi $M = \emptyset$)