Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 20 12/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Derivate di ordine generico $k \geq 2$ . . | $f: A \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^M)$ A aperto

CENNO SULLE DEFINIZIONI | $x_0 \in A$

· FISSO $k \geq 1$. Potrei definire

DERIVATE DIREZIONALI

· Le derivate direzionali di ordine k $\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^N\right)$

$f^{(k)}(x_0)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) =$ deriv. primo rispetto a $\vec{v}_k$, poi rispetto a $\vec{v}_{k-1}$ . . . , infine rispetto a $\vec{v}_1$

$$= \frac{d}{dv_1}\left(\frac{d}{dv_2}\left(\frac{d}{dv_3} \quad f(x)\right)\right)\Bigg|_{x=x_0}$$

(dove $\frac{d}{d\vec{v}} f(x) = f'(x)(\vec{v})$)

Per esempio se $f(x,y) = \sin(xy)$

$$f'(x,y)(\vec{v}) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{v} =$$

$$\begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ x\cos(xy) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \cos(xy)\left(y\, v_x + x\, v_y\right) = g(x,y)$$

$$f''(x,y)(\vec{w},\vec{v}) = g'(x,y)(\vec{w}) = \nabla g(x,y)\cdot\vec{w} =$$

$$\begin{pmatrix} -y\sin(xy)(yv_x+xv_y)+\cos(xy)v_y \\ -x\sin(xy)(yv_x+xv_y)+\cos(xy)v_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{array}{l} -\sin(xy)(yv_x+xv_y)(w_x y+w_y x)+ \\ \cos(xy)(v_y w_x+v_x w_y) \qquad =: h(x,y) \end{array}\right.$$

$$f'''(0,0)(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = h'(0,0)(\vec{u}) =$$

$$\frac{d}{dt} h(t\vec{u})\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(-\sin(t^2u_xu_y)(t\,u_yv_x+t\,u_xv_y)(t\,u_yw_x+t\,u_xw_y)+ \\ \cos(t^2u_xu_y)(v_yw_x+v_xw_y)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(-t^2\sin(t^2u_xu_y)(u_yv_x+u_xv_y)(u_yw_x+u_xw_y)+ \\ \cos(t^2u_xu_y)(v_yw_x+v_xw_y)\Big|_{t=0} =$$

$$= -2t\,(\ldots)\big|_{t=0} - t^2\ldots\big|_{t=0} + 2t\,\circ\ldots = 0$$ ☹

TROPPO FACILE — PROVIAMO

$$f'''(0,1)(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = h'(0,1)(\vec{u})$$

Faccio $\nabla h(x,y)\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix} =$

$$\Big(\underbrace{-y\cos(xy)(yv_x+xv_y)(w_xy+w_yx)-\sin(xy)v_y}\Big)u_x +$$
$$\underbrace{-y\sin(xy)(v_yw_x+v_xw_y)u_x}_{=0} +$$
$$\Big(-x\cos(xy)(yv_x+xv_y)(w_xy+w_yx)-\sin(xy)v_x\Big)u_y +$$
$$-x\sin(xy)(v_yw_x+v_xw_y)u_y \implies$$

$xy=0$

$=0$ in $(0,1)$

$$f'''(0,1)(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = h'(0,1)(\vec{u}) = (-1)(v_x)(w_x)u_x = \boxed{-v_xw_xu_x}$$

$$\boxed{f'''(0,1)(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = -v_xw_xu_x}$$

DI GRADO 3

NOTA CHE NON DIPENDE DALL'ORDINE DEI 3 vettori

- differenziale K-ESIMO ← lo posso definire

DERIVANDO ITERATIVAMENTE $df \quad d^2 f \ldots$

QUESTA DEFINIZIONE MI PRODUCE - Dato x_0 - una APPLICAZIONE

$$d^{(k)}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^N}_{K \text{ FATTORI}} \to \mathbb{R}$$

LINEARE IN OGNI VARIABILE (UNA APPL. K-LINEARE)

SI VEDE CHE $\quad d^{(k)}(x_0)(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k) = f^{(k)}(x_0)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$

- DERIVATE PARZIALI K-ESIME

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) \Big|_{x=x_0} = f^{(k)}(x_0)(\hat{e}_{i_1}, \hat{e}_{i_2} \ldots \hat{e}_{i_k})$$

$$\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x \partial y \partial x} = f^{(3)}(x_0)(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_1) \right)$$

TEOREMA (diff totale + Schwartz) Se f è di classe $C^k(A)$ (CIOÈ tutte le possibili derivate parziali K-esime (e quindi quelle di ordine $< k$) esistono continue in A)

ALLORA Esiste il differenziale K-ESIMO e in particolare $f^{(k)}(x)(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k)$ è K-lineare in $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k$ (lineare in ogni $\vec{v}_i$)

INOLTRE $f^{(k)}(x)(\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k)$ NON CAMBIA SE FACCIO UNA PERMUTAZIONE DELLE DIREZIONI $\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k$

CONSEGUENZA (esempio nel caso $k=3$)

$$f^{(3)}(x_0)(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k$$

se $K=4$

$$f^{(K)}(x)(\vec{t},\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \sum_{ijkh=1}^{N} \frac{\partial^K f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_h} t_i u_j v_k w_h$$

e così via...

PER ESPRIMERE QUESTE DERIVATE CONVIENE INTRODURRE LA NOTAZIONE CON I "MULTI INDICI"

<u>DEF</u> Chiamo multiindice di dimensione K una K-upla di interi (≥ 0) cioè

$$\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_K) \qquad \alpha_i \in \mathbb{N} \quad (0 \in \mathbb{N})$$

Per esempio $\alpha_0 = (1, 0, 5, 3)$ è un 4-multiindice

Dato un tale α PONGO:

- LUNGHEZZA di α : $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_K$
  ($|\alpha_0| = 9$)
- FATTORIALE di α : $\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_K!$ $\quad (0! = 1)$
  ($\alpha_0! = 1!\,0!\,5!\,3! = 120 \cdot 6 = \dots$)
- POTENZA α-ESIMA DI UN VETTORE K-dimensionale
  $\vec{v}^{\,\alpha} = v_1^{\alpha_1} \cdots v_K^{\alpha_K}$
  $(3, -1, 0, 1)^{\alpha_0} = 3^1 \cdot (-1)^0 \cdot 0^5 \cdot 1^3 = 3 \qquad (x^0 = 1)$
- Derivata α-ESIMA : $D_\alpha f(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_K^{\alpha_K}} f(x)$

$$\left(\partial^{\alpha_0} f = \frac{\partial^9 f}{\partial x\, \partial z^5\, \partial w^3}(x) \right)$$

$\alpha_0 = (1, 0, 5, 3)$ $\qquad$ (le variabili sono x, y, z, w)

TO BE CONTINUED...