Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 19 11/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Torniamo sul "controesempio"

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo visto che

① f è differenziabile in $(0,0)$ e $df(0,0) = 0$
$(df(0,0)\vec{v} = 0 \quad \forall v)$

② se $(x,y) \neq (0,0)$ $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ continue e vale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

POSSIAMO OSSERVARE CHE:

③ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Infatti

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{|y|^3\,|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{\big(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq |y|}\big)^3\,\underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq |x^2-y^2|}}{(x^2+y^2)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

STESSO RAGIONAMENTO PER $\frac{\partial f}{\partial y}$

<u>DUNQUE</u> Avrei potuto dedurre (1) semplicemente usando (2) e (3) + t. diff. totale dato che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$(f(x,0)=f(0,y)=0)$

$\Rightarrow$ e allora le $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue in $(0,0)$ $\Rightarrow$ vale (1)

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ è di classe } C^1(\mathbb{R}^2)}$$

(4) Mostriamo che esiste $f''(0,0)(\vec{v},\vec{w})$ per ogni $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$

QUESTO SIGNIFICA CHE, fissati $\vec{v}$ e $\vec{w}\in\mathbb{R}^2$

(a) $\exists\ \underbrace{f'(x,y)(\vec{w})}_{g(x,y)}$ per $(x,y)\simeq(0,0)$

(b) $\exists\ g'(0,0)(\vec{v})$ $\left(= f''(0,0)(\vec{v},\vec{w})\right)$

$$\boxed{\vec{w}=\begin{pmatrix} w_x \\ w_y\end{pmatrix} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y\end{pmatrix}}$$

(a) è conseguenza del fatto che f è C^1 $\Rightarrow$

$$g(x,y) = f'(x,y)(\vec{w}) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{w} =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,w_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,w_y =$$

$$= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} w_x + \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} w_y = g(x,y)$$

QUESTO SE $(x,y) \neq (0,0)$. Se $(x,y)=(0,0)$ $\quad g(x,y)=0$

(b) Devo calcolare $g'(0,0)\vec{v}$. Applico la definizione di derivata direzionale. Devo considerare (suppongo $\vec{v} \neq \vec{0}$)

$\varphi(t) := g(t v_x, t v_y)$ e calcolare $\varphi'(0)$. Vedo che $(t \neq 0)$

$$\varphi(t) = \frac{t^5 v_y(v_x^4+4v_x^2v_y^2-v_y^4)w_x + t^5 v_x(v_x^4-4v_x^2v_y^2-v_y^4)w_y}{t^4(v_x^2+v_y^2)^2} =$$

$$= t\,\frac{v_y(v_x^4+4v_x^2v_y^2-v_y^4)w_x + v_x(v_x^4-4v_x^2v_y^2-v_y^4)w_y}{(v_x^2+v_y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f''(0,0)(\vec{v},\vec{w}) = \varphi'(0) = \frac{(v_x^4v_y+4v_x^2v_y^3-v_y^5)w_x + (v_x^5-4v_x^3v_y^2-v_xv_y^4)w_y}{(v_x^2+v_y^2)^2} \quad \circledast$$

IN PARTICOLARE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_1,\hat{e}_1) = \frac{(0+0-0)1+(1-0-0)0}{(1^2+0^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_2,\hat{e}_2) = \frac{(0+0-1)\cdot 0+(0-0-0)\cdot 1}{(0^2+1^2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_1,\hat{e}_2) = \frac{(0+0-0)0+(1-0-0)1}{(1^2+0^2)^2} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = f''(0,0)(\hat{e}_2,\hat{e}_1) = \frac{(0+0-1)1+(0-0-0)0}{(0^2+1^2)^2} = -1$$

ABBIAMO RITROVATO IL FATTO CHE $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

INOLTRE VEDO DALL'ESPRESSIONE DI $f''(0,0)(\vec{v},\vec{w})$ CHE QUESTA <u>NON</u> È BILINEARE IN $(\vec{v},\vec{w})$ ($\Leftarrow$ NON È LINEARE IN $\vec{v}$ - $\vec{w}$ FISSATO)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{QUESTA } f \text{ NON È DIFFERENZIABILE 2 volte IN } (0,0) \quad \nexists\, d^2 f(0,0)}$

OSS. Da $\circledast$ trovo $f''(0,0)(\vec{v},\vec{v}) = \dfrac{(v_x^2 - v_y^2)(v_x^4 + v_y^4)}{(v_x^2+v_y^2)^2}$

che NON È QUADRATICA $\longleftrightarrow$ NON È UN POLINOMIO DI II° GRADO IN v_x v_y $\Big(\underbrace{f''(0)(t\vec{v},t\vec{v}) = t^2 f''(0)(\vec{v},\vec{v})}_{\text{vero sempre}}$, MA ... $\Big)$

D'ORA IN POI $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto

$x_0 \in A$ $\quad f$ è $C^2(A)$

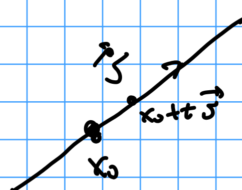
$\left(\Rightarrow \forall x_0 \ \exists\, d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \text{ bilineare simmetrica}\right)$

OSS. $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ Se considero $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v}) \Longrightarrow$

$\varphi(0) = f(x_0)$ $\qquad \underbrace{\varphi'(t) = f'(x_0 + t\vec{v})(\vec{v})} = \nabla f(x_0+t\vec{v}) \cdot \vec{v}$

vero perché $\gamma(t) := x_0 + t\vec{v}$ è una curva

e $\gamma'(t_0) = \vec{v}$ $\quad \forall t_0 \in \mathbb{R}$



?? $\varphi''(0) = \dfrac{d}{dt}\varphi'(t)\Big|_{t=0} = \dfrac{d}{dt} f'(x_0+t\vec{v})(\vec{v})\Big|_{t=0}$

$= \Big(d''(x_0+t\vec{v})(\vec{v})\Big)(\vec{v})\Big|_{t=0} = f''(0)(\vec{v},\vec{v}) = f''(0)(\vec{v}^{\,2})$

DUNQUE $\varphi(0) = f(x_0)$ $\quad \varphi'(0) = f'(x_0)(\vec{v})$ $\quad \varphi''(0) = f''(x_0)(\vec{v},\vec{v})$ $\quad \left(f''(x_0)(\vec{v}^{\,2})\right)$

Dal conto fatto sopra ricavo :

TEOREMA 1 A sia CONVESSO

$\left(\text{se } x_1, x_2 \in A \Rightarrow \text{il segmento } t x_2 + (1-t) x_1 \in A \quad \forall t \in [0,1] \right)$

∴ Vale la formula di Taylor, al II° ordine, con resto di Lagrange

$\forall x \in A \quad \exists \, \xi \in]0,1[$ tale che :

è un punto sul segmento tra x_0 e x

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} Hf(\overbrace{\xi x + (1-\xi) x_0}) \, (x - x_0)^2$$

gradiente di f in x_0

matrice Hessiana di f in x_0

$\left(\text{SOTTINTENDO} \quad Hf \, v^2 = \vec{v}^{\,T} Hf \, \vec{v} \right)$

Dim. Applico Taylor alla funzione di 1 variabile $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$

NOTA $\varphi(0) = f(x_0)$ $\varphi(1) = f(x)$. Allora $t > 0$

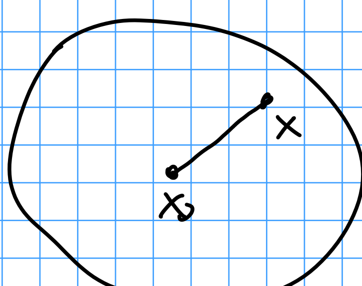
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) \, t^2 \qquad \text{dove} \quad 0 < \xi < t$$

METTO $t = 1$

FORMULE DI PRIMA

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(\xi) =$$

$(0 < \xi < 1)$ $\quad f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0 + \xi(x - x_0))(x - x_0)^2$



TEOREMA 2 (Taylor con resto di Peano - caso di ordine 2)

NON CI SONO IPOTESI DI CONVESSITÀ SU A

Vale la formula:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2 + \sigma(x)$$

dove $\sigma(x) = o(\|x-x_0\|^2)$ cioè $\lim_{x\to x_0} \frac{\sigma(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$

__DIM.__ Dato che A è aperto $\exists\, r>0$ tale che $B(x_0,r) \subset A$.

PONGO $\sigma(x) = f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) - \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2$

(σ è definito in modo che valga la formula).

Se $x \in B(x_0,r)$ ($\leftarrow$ CONVESSO) so che $\exists\, \xi_x \in]0,1[$ t.c.
posto $P_x = x_0 + \xi_x(x-x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} Hf(P_x)(x-x_0)^2$$

(sostituisco $f(x)$ in $\sigma(x) = \dots$

$$\Rightarrow \quad \sigma(x) = \frac{1}{2} Hf(P_x)(x-x_0)^2 - \frac{1}{2} Hf(x_0)(x-x_0)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\big(Hf(P_x) - Hf(x_0)\big)(x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow \quad |\sigma(x)| \le \frac{1}{2} \underbrace{\|Hf(P_x) - Hf(x_0)\|}\ \|x-x_0\|^2$$

$$\left(\ |v^T A v| = |Av\cdot v| \le \|Av\|\,\|v\| \le \|A\|\,\|v\|^2 \ \right)$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{\sigma(x)}{\|x-x_0\|^2} \right| \le \frac{1}{2} \|Hf(P_x) - Hf(x_0)\|$$ $\leftarrow$ TENDE A ZERO SE $x \to x_0$ PERCHÉ $P_x \to x_0$ e $Hf(P_x) \xrightarrow{\text{nelle matrici}} Hf(x_0)$

IN ALTRI TERMINI $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\sigma(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0}$ #

TEOREMA (CLASSIFICAZIONE dei punti critici mediante le derivate II^e)

$f: A \to \mathbb{R}$ A aperto f di classe C^2

$x_0 \in A$ tale che $\nabla f(x_0) = 0$ (x_0 è critico per f)

SI HA

(a) Se $H_f(x_0)$ è definito positivo (negativo) $\Rightarrow$ x_0 è pto di minimo (massimo) locale

(b) Se $H_f(x)$ è semidefinito positivo (negativo) $\forall x \in B(x_0, r)$ con $r>0$ $\Rightarrow$

$f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0, r)$ (pto di min)

$(f(x) \geq f(x_0))$ (pto di max)

(c) Se $H_f(x_0)$ è INDEFINITA (Ha tutti autov. $\neq 0$, ma non tutti con lo stesso segno)

$\Rightarrow$ x_0 è "punto di sella" e esistono punti x', x'' vicini quanto si vuole a x_0 tali che

$f(x') < f(x_0) < f(x'')$

DIMOSTRO LA (a), caso del minimo.

L'ipotesi mi dice che $H_f(x_0) > 0 \Leftrightarrow H_f(x_0)(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ $\forall \vec{v} \neq \vec{0}$

Lemma Se L è una matrice simmetrica $N \times N$ con $L > 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, c > 0$ tale che $L\vec{v} \cdot \vec{v} \geq c \|\vec{v}\|^2$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

Dim. Considero $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$. S è chiuso e limitato. Chiamo

$c := \min_{\vec{v} \in S} L\vec{v} \cdot \vec{v}$ ← so che esiste per Weierstrass

per def. di minimo $\exists\, \bar{v} \in S$ tale che $c = L\bar{v} \cdot \bar{v}$

Dato che $\bar{v} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow$ $c > 0$ DUNQUE (ricapitolando)

$\forall \vec{v} \in S \qquad L\vec{v}\cdot\vec{v} \geq L\bar{v}\cdot\bar{v} = c > 0$ (sono ancora sulla sfera)

Ma se prendo un qualunque $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \in S$

$$\Rightarrow \quad L\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \geq c \iff \boxed{L\vec{v}\cdot\vec{v} \geq c\|\vec{v}\|^2}$$

dimostriamo che x_0 è punto di minimo locale.

① Dato che $H_f(x_0) > 0$ $\exists\, c > 0$ tale che (uso il LEMMA)

$$H_f(x_0)(x-x_0)^2 \geq c\,\|x-x_0\|^2$$

② Per la formula di Taylor di ordine 2, resto di Peano

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)}_{=0\ (x_0 \text{ è critico})} + \frac{1}{2}H_f(x_0)(x-x_0)^2 + \sigma(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sigma(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$$

③ Posso scegliere un raggio $r > 0$ tale che

$$\left|\frac{\sigma(x)}{\|x-x_0\|^2}\right| \leq \frac{c}{2} \qquad \forall x \in B(x_0, r) \subset A$$

$$\Updownarrow$$

$$|\sigma(x)| \leq \frac{c}{4}\|x-x_0\|^2 \qquad \Big(\underbrace{-\frac{c}{4}\|x-x_0\|^2 \leq \sigma(x)} \leq \frac{c}{4}\|x-x_0\|^2\Big)$$

④ Dalla formula in ② ottengo

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2}c\,\|x-x_0\|^2 - \frac{c}{4}\|x-x_0\|^2 \qquad \text{se } x \in B(x_0, r)$$

$$= f(x_0) + \frac{c}{4}\|x-x_0\|^2 \geq f(x_0)$$

(ANZI $\quad f(x) > f(x_0)$ se $x \in B(x_0, r)$ $x \neq x_0$)

x_0 è di "minimo stretto" ∎

ESERCIZIO $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = 4x^4 + 4xy + 2y^2$$

CLASSIFICHIAMO I PTI CRITICI (se ce ne sono)

Calcoliamo le derivate:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16x^3 + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 4y \quad \leftarrow \text{LE METTO} = 0$$

$$\begin{cases} 16x^3 + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16x^3 = 4x \\ y = -x \end{cases}$$

$$16x^3 = 4x \iff \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = 0 \quad y = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} \quad y = -x = \mp\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ TRE PTI CRITICI $(0,0)$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Calcoliamo gli Hessiani:

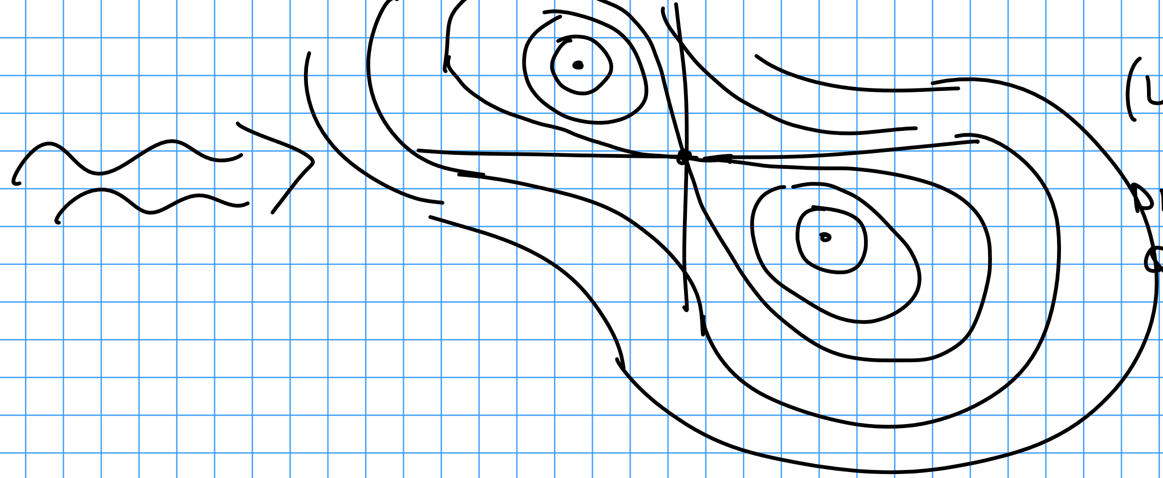
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 48x^2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

- $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow \det < 0 \Rightarrow$ PTO DI SELLA $\underline{\underline{(N=2)}}$

- $Hf\left(\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \det = 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 32 > 0$, $\quad a_{11} = 12 > 0$

ENTRAMBI PTI DI MINIMO



(LINEE DI LIVELLO

DISCORSO QUALITATIVO

NOTA $\quad f(x,y) = 4x^4 + 4xy + 2y^2 \geq 4x^4 - 8x^2 + \frac{3}{2}y^2$

$$|4xy| \leq \frac{(4x)^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 8x^2 + \frac{y^2}{2}$$

$$\boxed{4xy \geq -8x^2 - \frac{y^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) \geq \left(4x^4 - 8x^2\right) + \frac{3}{2}y^2$$

se $(x,y) \to \infty$ ALMENO UNO TRA $|x|$ e $|y|$ diverge

(e l'altro pezzo è limitato inferiormente) $\Rightarrow$

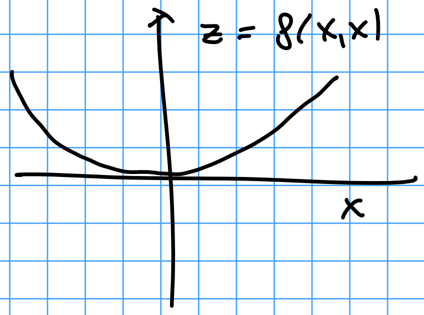
$$\lim_{(x,y)\to\infty} \left(4x^4 - 8x^2\right) + \frac{3}{2}y^2 = +\infty$$

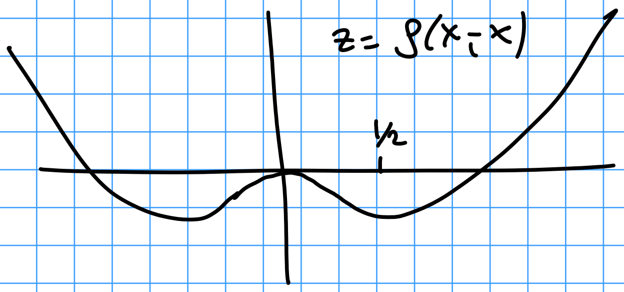
$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ HA MINIMO} \Rightarrow$$

il minimo è assunto in $(x,y) = \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 4\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \dots$$

$$(< 0)$$


z = f(x, x)
x


z = f(x, -x)
1/2