Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 18 06/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Fermat $\longrightarrow$ I punti x_0 di max/min (relativi o ass.) per f, che sono INTERNI al dominio di f, SONO punti stazionari cioè $\nabla f(x_0) = 0$

Esempio Considero $f(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(1 - 4xy)$

DOMANDA Trovare (se esiste) il minimo di f.

I) Dominio di f è l'insieme $A = \{ xy < \frac{1}{4} \}$

(è aperto)

II) So che f ammette minimo perché

(a) se $(x_0, y_0) \in \partial A$ $\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$

(b) $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$

(ABBIAMO GIÀ VISTO CHE VALGONO (a) e (b) qualche lezione fa)

(a) Se $(x_0, y_0) \in \partial A \Rightarrow 4x_0 y_0 = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = x_0^2 + y_0^2 - \lim_{t\to 1} \ln(1-t) = +\infty$$

(b) Vedere come abbiamo già fatto:

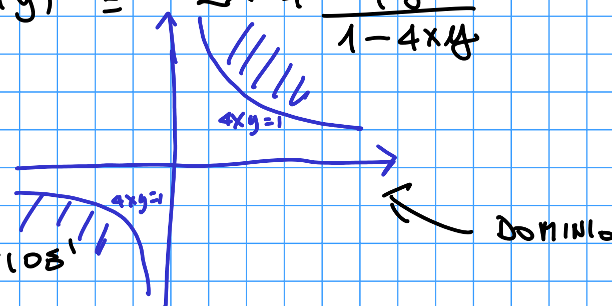
$$\left(f(x,y) \geq x^2+y^2-\ln(1+2x^2+2y^2) \to +\infty \right)$$

DUNQUE f ha minimo.

III Per Fermat il punto di minimo deve essere un punto stazionario. CERCO TUTTI I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{1}{1-4xy}(-4y) = 2x + \frac{4y}{1-4xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + \frac{4x}{1-4xy}$$



IMPONGO $\nabla f(x,y) = 0$ CIOE'

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y}{4xy-1} \\ y = \dfrac{2x}{4xy-1} \end{cases} \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{4xy-1} \cdot y = \frac{2}{4xy-1}\,\frac{2}{4xy-1}\,x$$

$$x = \left(\frac{2}{4xy-1}\right)^2 x \iff \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{2}{4xy-1} = \pm 1 \end{cases}$$

SE $x=0$ (lo metto nel sistema iniziale) $\Rightarrow y=0$

e $(0,0)$ verifica il sistema $\Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ È STAZIONARIO}}$

SE $x \neq 0$ Metto la condizione $\dfrac{2}{4xy-1} = \pm 1$ nel sistema

$$\begin{cases} x = y \\ \dfrac{2}{4xy-1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ \dfrac{2}{4x^2-1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ 2 = 4x^2-1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow 4xy = 4\,\dfrac{3}{4} = 3 > 1$ NON NEL DOMINIO

oppure

$$\begin{cases} x = -y \\ \dfrac{2}{4xy-1} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ \dfrac{2}{-4x^2-1} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ 2 = 4x^2+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \mp\dfrac{1}{2} \ (=-x) \\ x = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{STAZIONARI}}$$

ALLA FINE HO TROVATO TRE PUNTI STAZIONARI

$(0,0)$ $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

(IV) $\min_A f = \min\left(f(0,0), f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right), f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$

$f(0,0) = 0$

$f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} - \ln\left(1-4\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} - \ln(2) = \frac{1}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\parallel$

$f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

DOMANDA $\frac{1}{2} - \ln(2) > 0$?? NO

$\Updownarrow$

$\frac{1}{2} > \ln(2) \iff e^{1/2} > 2 \iff \sqrt{e} > 2$

NO

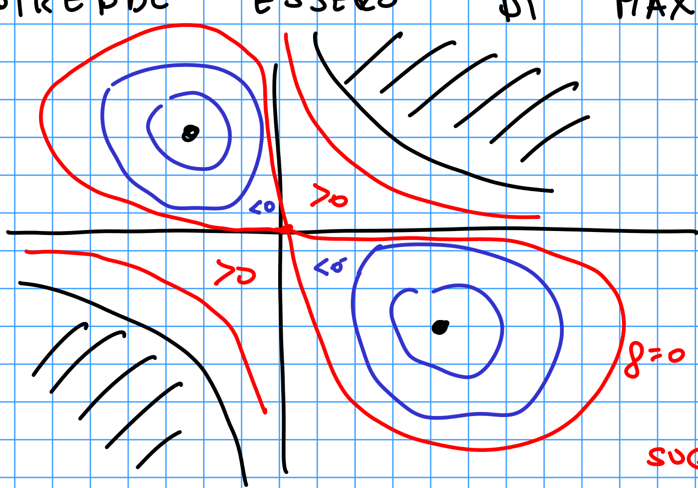
SO CHE $e < 3 \Rightarrow \sqrt{e} < \sqrt{3} < 2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{2} - \ln(2) < 0 \quad \leftarrow \text{ È IL MINIMO}}$

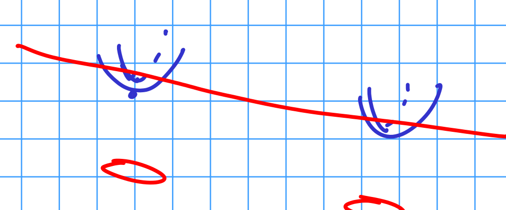
$\Rightarrow$ I PUNTI $\pm\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ sono pti di minimo

CURIOSITÀ Che tipo di punto è $(0,0)$??

POTREBBE ESSERE DI MAX / MIN REL. ??



← IDEA INTUITIVA DELLE LINEE DI LIVELLO



SUGGERISCE CHE $(0,0)$ SIA UN PUNTO DI "SELLA"

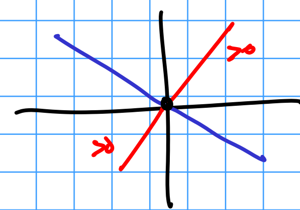
A CONFERMA DI QUESTA IDEA NOTIAMO CHE

SE $(x,y) \simeq (0,0)$

$$\ln(1-4xy) \simeq -4xy$$

dunque
$$f(x,y) \simeq \underbrace{x^2+y^2+4xy}_{g(x,y)} \quad \text{se } (x,y)\simeq(0,0)$$

$$g(x,x) = 6x^2 > 0$$
$$g(x,-x) = -2x^2 < 0$$



• OVVIAMENTE f <u>NON HA MASSIMO</u> (tende a $+\infty$ in vari punti)

e non ha neanche massimi locali perché $(0,0)$ <u>NON</u> è di massimo.

Derivate di ordine ≥ 2 $\quad$ $\boxed{\text{DERIVATE II}^{\circ}}$

<u>DERIVATE DIREZIONALI II^e</u>

Se ho $f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ open $\quad x_0 \in A$

Dati $\vec{v}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ dico che esiste $f''(x_0)(\vec{v},\vec{w})$

<u>SE</u> esiste $f'(x)(\vec{w})$ per x vicino a x_0

e questa $g(x) = f'(x)(\vec{w})$ ammette derivata lungo $\vec{v}$

nel punto x_0 $\quad g'(x_0)(\vec{v}) = f''(x_0)(\vec{v},\vec{w})$

<u>PER ESEMPIO</u> $\quad f(x,y) = xy^2 \quad (x_0,y_0) = (1,2)$

Proviamo ad applicare la def. sopra. Dati $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = f'(x,y)(\vec{w}) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}\cdot\vec{w}$$

devo derivare g nella direzione $\vec{v}$ $\Rightarrow$ TROVO

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \vec{v} \right) \cdot \vec{w} = \quad \text{METTO } x=1 \quad y=2$$

$$\boxed{f''(1,2)(\vec{v},\vec{w}) = (w_x \; w_y) \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}$$

È BILINEARE IN $\vec{v}, \vec{w}$

DEF Dato $f : A \to \mathbb{R}^M$ suppongo che sia differenziabile in ogni punto di A (basterebbe in un intorno di x_0)

RISULTA DEFINITA L'APPLICAZIONE

$$df(x) \qquad \forall x \in A$$

$$df : A \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$$

(APPLICAZIONI LINEARI $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$)

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ è uno spazio vettoriale – di dimensione $N \cdot M$ – su cui è definita la norma:

$$\|L\| = \max\left\{ \|Lx\|_M \quad \|x\|=1 \quad x \in \mathbb{R}^N \right\}$$

SI VEDE CHE IN QUESTO MODO DEFINISCO UNA NORMA SU $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$

HA SENSO DIRE CHE df è differenziabile in un punto $x_0 \in A$

$$d(df)(x_0) \text{ è un'applicazione lineare da } \mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$$

CIOÈ $\quad d(df)(x_0)(\vec{v}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

e quindi $\quad \underbrace{\Big(d(df)(x_0)(\vec{v})\Big)(\vec{w})}_{\text{è un'applicazione bilineare da } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M} \in \mathbb{R}^M \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N \; \vec{w} \in \mathbb{R}^N$

e la indico più semplicemente con

$$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$

FATTO Se df è differenziabile in x_0 (NEL SENSO SPIEGATO SOPRA) allora

$$\boxed{d^2 f(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = f''(x_0)(\vec{v},\vec{w})} \quad (\star)$$

- Dico in questo caso che f è differenziabile due volte in x_0 e chiamo $d^2 f(x_0)$ il differenziale secondo di f in x_0
- QUANDO f è diff. due volte in x_0 ricavo da $(\star)$

che $$\boxed{d^2 f(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = \sum \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} v_i w_j} \quad (\star\star)$$

dove

$f''(x_0)$ è BILINEARE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = f''(x_0)(\hat{e}_i, \hat{e}_j) \Leftarrow \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)$$

QUINDI $d^2 f(x_0)$ è DETERMINATO DALLA "MATRICE"

$$H_{ij} = \left\{\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{ij}$$ (NOTA CHE gli elementi sono in $\mathbb{R}^M$)

- Se $\exists\, d^2 f(x_0) \Rightarrow df(x)$ è CONTINUO IN x_0

TEOR DEL DIFF TOTALE (per le der. II) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ esistono $i = 1 \ldots N$ $j = 1 \ldots N$ e sono continue in X_0

$\Rightarrow f$ è diff. due volte in X_0

PROBLEMA Posso dire che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$??

(o più in generale $f''(x_0)(\vec{v},\vec{w}) = f''(x_0)(\vec{w},\vec{v})$)

ESEMPIO (controesempio)

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \qquad f(0,0) = 0$$

• Posso dire che f è differenziabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(perché $f(x,0)=0$, $f(0,y)=0$)

<u>DUNQUE</u> $\exists\, df(\vec{0}) \iff$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - 0\cdot x - 0\cdot y}{\|(x,y)\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\Delta(x,y)} = 0$$

Provo a dimostrarlo usando lo solito $|xy| \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$

$$|\Delta(x,y)| \le \left| \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$$|x^2-y^2| \le |x^2| + |-y^2| = x^2+y^2$$

<u>TORNA</u>

f è differenziabile in $(0,0)$ e $df(0,0) = 0$ $\qquad \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• VEDO SE ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI SECONDE

MI SERVONO, PER (x,y) generico, le derivate prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\left(y(x^2-y^2)+xy\,2x\right)(x^2+y^2) - xy(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{(\overbrace{x^2y - y^3 + 2x^2y}^{3x^2y})(x^2+y^2) - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$\frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

Per trovare l'altra derivata scambio x e y e cambio il segno $\Longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}}$

CERCHIAMO $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) =$

RAPPORTO INCREMENTALE DI $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ RISPETTO A x

$$\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} \right)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x \cdot x^4}{x^4}}{x} = 1$$

FACCIAMO L'ALTRA DERIVATA:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y(0-y^4)}{y^4} - 0}{y} =$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{-y^4}{y^4} = -1$$

DUNQUE

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

IN GENERALE LE DERIVATE 2^e dipendono dall'ordine di derivazione

PERÒ

<u>Teorema</u> (di Schwartz) Se $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ per ogni $x \in A$ e queste sono <u>CONTINUE</u> IN x_0 $\Longrightarrow$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

DUNQUE SE f è $C^2(A)$ (derivabile due volte in A con derivate 2^e CONTINUE)

TUTTO TORNA.

IN PARTICOLARE NEL CASO SCALARE: $f: A \to \mathbb{R}$

chiamo MATRICE HESSIANA LA MATRICE (QUADRATA $N \times N$)

$$H_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_N}(x_0) \end{bmatrix}$$

Dal teorema di Schwatz vedo che

$$f \in C^2(A) \Rightarrow H_f(x) \text{ È SIMMETRICA } \forall x \in A$$

ESEMPIO $\quad f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 4xy \quad f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4 \qquad -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$ è COSTANTE RISPETTO A (x,y)

- QUESTA MATRICE È INDEFINITA DATO (è 2×2 e) $\det = 12 - 16 < 0$
- f HA UN SOLO PUNTO CRITICO $\rightarrow$

se impongo $\nabla f = 0$ trovo $\underbrace{\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 6y = 0 \end{cases}}_{\det \neq 0}$ $\leftarrow$ SOLO LA SOLUZIONE $x=0 \;\; y=0$

UNICO PTO CRITICO È $(0,0)$ $\leftarrow$ NÉ DI MAX NÉ DI MIN

$f(0,0) = 0$ MA SO CHE f ha sia valori > 0 che valori negativi (essendo $f(x,y) = (x,y)\, H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$)