Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 17 05/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

DERIVATA DI UNA FUNZIONE f (a valori reali) LUNGO UNA CURVA γ

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ $\quad A$ aperto, f $C^1(A)$

$$(\star) \quad \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

NOTA $(\star)$ è una generalizzazione di

$$(\star\star) \qquad f'(x_0)(\vec{v}) = \nabla f(x_0) \cdot \vec{v}$$

In questo caso sto usando la curva $\gamma(t) := x_0 + t\vec{v}$
con $t = 0 \Rightarrow \gamma(0) = x_0 \quad \gamma'(t) = \vec{v} = \gamma'(0)$

DA $(\star\star)$ ottengo che (uso Schwartz)

$$f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \, \|\vec{v}\|$$

Se $\|\vec{v}\| = 1$ ottengo:

$$\boxed{f'(x_0)(\vec{v}) \leq \|\nabla f(x_0)\| \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N \text{ con } \|\vec{v}\| = 1}$$

Quindi $f'(x_0)(\vec{v})$ è "al massimo" pari a $\|\nabla f(x_0)\|$ (se $\|\vec{v}\|=1$). Se $\nabla f(x_0)=0$ tutto fa zero

$$f'(x_0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v}$$

Supponiamo $\nabla f(x_0) \neq \vec{0}$. Allora posso prendere

$$\vec{v}_{MAX} = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \qquad (\|\vec{v}_{MAX}\|=1)$$

Usando (★★) trovo

$$f'(x_0)\,\vec{v}_{MAX} = \nabla f(x_0)\cdot \vec{v}_{MAX} = \nabla f(x_0)\cdot \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\|$$

$\|\nabla f(x_0)\|^2$

DUNQUE ho mostrato che

$$\|\nabla f(x_0)\| = \max_{\substack{\vec{v}\in\mathbb{R}^N \\ \|\vec{v}\|=1}} f'(x_0)(\vec{v})$$

Inoltre, se $\nabla f(x_0)\neq 0$, il vettore $\vec{v}_{MAX} := \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ è il vettore $\vec{v}$ di norma 1 su cui $f'(x_0)(\vec{v}) = \|\nabla f(x_0)\|$; IN ALTRI TERMINI $\vec{v}_{MAX}$ è la direzione su cui $f'(x_0)(\vec{v})$ è massima.

Def. Dato un numero $c\in\mathbb{R}$ chiamo "INSIEME DI LIVELLO c"

$$\{x\in A : f(x)=c\} = \{f=c\}$$

Supponiamo che "γ sia una curva di livello c" cioè

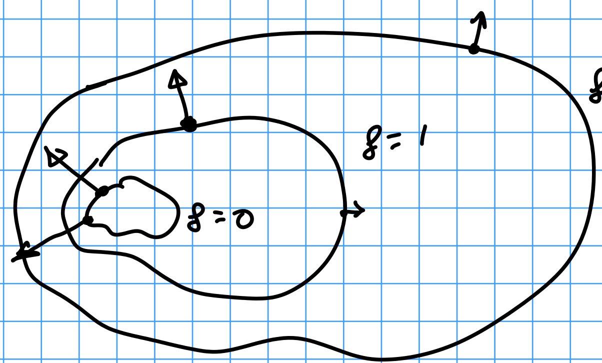
$$\gamma : [a,b]\to\mathbb{R}, \quad f(\gamma(t)) = c \quad (\gamma(t)\in\{f=c\})$$

Assumiamo che γ sia regolare. (di solito γ è chiusa)

ALLORA (da ★) so che

$$0 = \frac{d}{dt} c = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

DUNQUE $\nabla f(x_0)$ è perpendicolare "alla curva di livello che passa per x_0" — AMMESSO CHE CE NE SIA UNA



(più le linee sono fitte più grande è il modulo di ∇f)

Ricordiamo le nozioni di max/min rel/assoluto

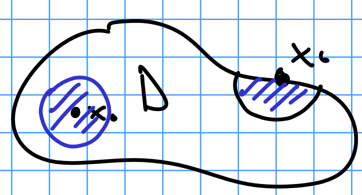
Def. $f : D \to \mathbb{R}$ D = dominio di f $D \subset \mathbb{R}^N$

(qualunque). $x_0 \in D$.

Dico che x_0 è PUNTO DI MASSIMO / MINIMO RELATIVO (o LOCALE) per f se esiste $\rho > 0$ tale che

$$f(x) \le f(x_0) \quad / \quad f(x) \ge f(x_0)$$

per ogni $x \in D$ con $\|x - x_0\| < \rho$



Se $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$

$\forall x \in D$

dirò che x_0 è punto di max / min (ASSOLUTO)

- posso anche omettere "ASSOLUTO" (se dico pto di massimo INTENDO pto di massimo assoluto)

IN GENERALE se x_0 è punto di max / min (relativo o assoluto) dico che

$f(x_0)$ è un massimo / minimo (relativo o assoluto) di f

- IL MAX (assoluto) è UNICO ; i punti di max possono essere tanti (lo stesso per il min)

è un numero in $\mathbb{R}$ sono in $\mathbb{R}^n$

MASSIMO (MINIMO) $\longrightarrow$ VALORE MAX (MIN)

TEOREMA (di Fermat) Sia A aperto di $\mathbb{R}^N$, sia $f : \bar{A} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(\bar{A})$.

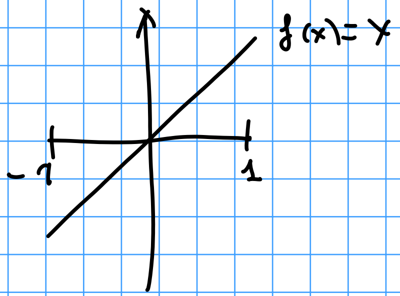
Supponiamo che $\boxed{x_0 \in A}$ e x_0 sia punto di max / min relativo per f.

N.B. x_0 DEVE ESSERE INTERNO AL DOMINIO

ALLORA $\nabla f(x_0) = \vec{0}$

IL TEOREMA NON CONTEMPLA IL CASO $x_0 \in \partial A$

($N=1$



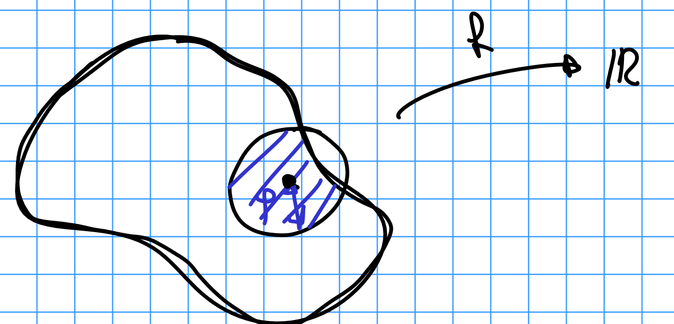
1 è pto di max per f su $[-1,1]$

ma $f'(1)=1 \neq 0$

x_0 NON è INTERNO a $[-1,1]$)

DIM Suppongo che $x_0 \in A$ sia punto di massimo.

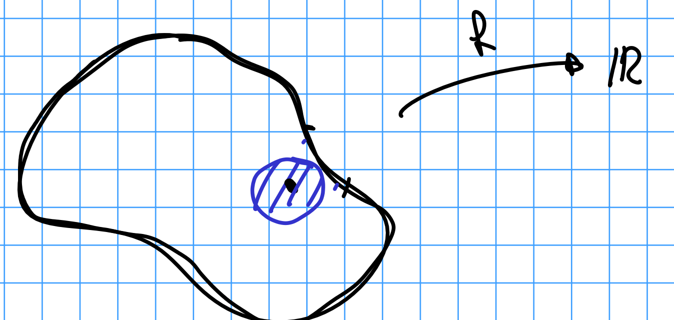
So che $\exists\, \rho > 0$ tale che $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in \bar{A} \cap B(x_0,\rho)$



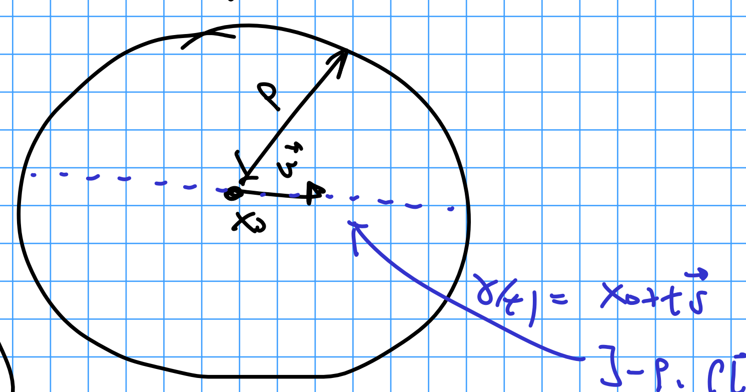
Dato che $x_0 \in A$ (aperto) posso rimpicciolire ρ e avere che $B(x_0,\rho) \subset A$

DUNQUE

$$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0,\rho) \quad (\subset A \subset \bar{A})$$



Fisso un vettore $\vec{v}$ con $\|\vec{v}\| = 1$; so che $\gamma(t) = x_0 + t\vec{v} \in B(x_0,\rho)$ se $|t| < \rho$



(infatti se $|t| < \rho$, allora

$\|x_0 - (x_0 + t\vec{v})\| =$

$\|t\vec{v}\| = |t|\,\|\vec{v}\| = |t| < \rho$)

$\Rightarrow$ posso fare $\displaystyle \frac{d}{dt} f(x_0 + t\vec{v})\Big|_{t=0} = f'(x_0)(\vec{v})$

Dato che x_0 è punto di massimo in $B(x_0,\rho)$ $\Rightarrow$

$t=0$ è punto di massimo per $f(x_0+t\vec{v})$ $\quad t\in\,]-\rho,\rho[$

$$f(x_0+t\vec{v}) \le f(x_0) \qquad \forall t \in\,]-\rho,\rho[$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt} f(x_0+t\vec{v})\Big|_{t=0} = f'(x_0)(\vec{v})$$

<u>DUNQUE</u>

$$f'(x_0)(\vec{v}) = 0 \qquad \forall \vec{v} \text{ con } \|\vec{v}\| = 1$$

Ne segue subito $\boxed{f'(x_0)(\vec{v}) = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N}$

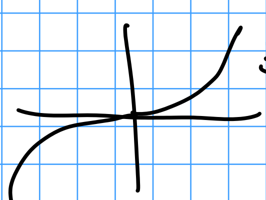
IN PARTICOLARE $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0) = \vec{0}$

#

<u>DUNQUE</u> I punti di massimo e minimo relativo per f <u>INTERNI</u> al dominio sono PUNTI STAZIONARI per f (PUNTI CRITICI)

<u>Def.</u> Dico che $x_0 \in A$ è STAZIONARIO (CRITICO) se
$\nabla f(x_0) = \vec{0}$

<u>OSS.</u> Non tutti i punti stazionari sono di max/min



$f(x) = x^3$ (<u>flesso</u>)

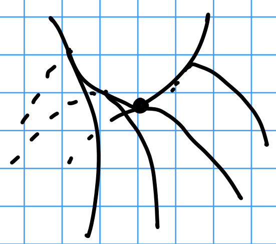
<u>IN $\mathbb{R}^3$</u> $\qquad f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

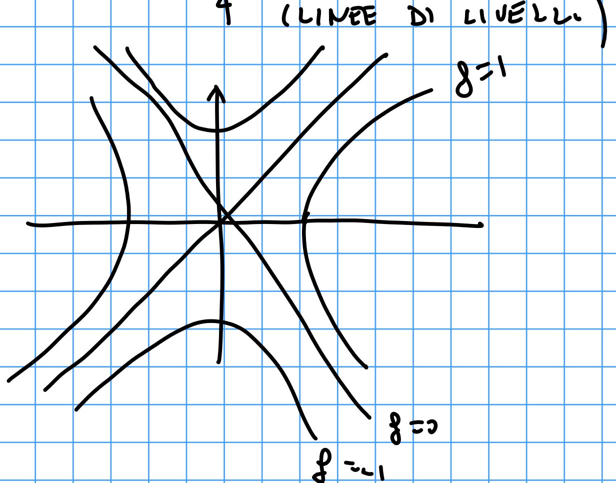
$(0,0)$ è STAZIONARIO per f <u>MA</u> È "PUNTO DI SELLA"

se guardo $f(x,0) = x^2$ ← HA MINIMO per $x=0$

$f(0,y) = -y^2$ ← HA MASSIMO per $y=0$



(NÉ DI MAX / NÉ DI MIN)



$x^2 - y^2 = c$