Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 16 04/11/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esempio Considero $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y+z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$ che è definita su $\mathbb{R}^3$ e assume valori in $\mathbb{R}^2$: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Posso scrivere
$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ dove $f_1(x,y,z) = x - y + z^2$, $f_2(x,y,z) = xyz$.
Facciamo le derivate parziali

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -1 & \frac{\partial f_1}{\partial z} &= 2z \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= yz & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= xz & \frac{\partial f_3}{\partial z} &= xy \end{aligned}\right\}$$

sono tutte funzioni continue di (x,y,z)

$\Rightarrow$ per il teorema del differenziale totale f è DIFFERENZIABILE in ogni punto (x,y,z) e si ha:

$$df(x,y,z)(v_x, v_y, v_z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\, v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\, v_y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\, v_z$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{pmatrix} v_x + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} v_y + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} v_y =$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ yz \end{pmatrix} v_x + \begin{pmatrix} -1 \\ xz \end{pmatrix} v_y + \begin{pmatrix} 2z \\ xy \end{pmatrix} v_z =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}}_{\text{Jacobiana di } f \text{ nel punto } (x,y,z)} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = df(x,y,z)\vec{v}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

[fissato il punto (x,y,z) $\quad df(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare]

Se per esempio prendo $(x,z,z) = (2 \ 1 \ -1) = P_0$

$$\Rightarrow \quad J_f(P_0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Se prendo $\vec{v} = (1, -1, 0) \Rightarrow$

$$f'(P_0)(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1'(P_0)\vec{v} \\ f_2'(P_0)\vec{v} \end{bmatrix}$$

facciamo una "verifica" SULLA SECONDA COMPONENTE

$$f_2(x,y,z) = xyz$$

$$f_2(P_0 + t\vec{v}) = (2+t)(1-t)(-1-0\cdot t) = \varphi(t)$$
$$(2+t-2t-t^2)(-1) = t^2+t-2$$

la derivo in t e poi metto $t=0$.

$$\varphi'(t) = 2t+1 \Big|_{t=0} = 1 \qquad \boxed{\text{TORNA}}$$

RICORDIAMO che se f ha valori reali (SCALARE)

si chiama gradiente di f in P_0 il vettore

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix} = {}^T\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N} \right] = {}^T J f(P_0)$$

Con questa notazione si ha

PRODOTTO SCALARE

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \sigma(x)$$

$$\text{con } \frac{\sigma(x)}{\|x - x_0\|} \to 0 \qquad \left(\sigma = o(\|x - x_0\|) \right)$$

$\sim$ se $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è lineare $\Rightarrow \exists\, \vec{v} \in \mathbb{R}^N$ t.c. $Lx = \vec{v} \cdot x$

Dim. (del t. diff totale — CASO $N = 2$, $M = 1$)

Ho una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^2$ $P_0 = (x_0, y_0) \in A$

A è aperto. So che $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ $\forall P \in A$

e queste derivate parziali sono continue in P_0.

DICO CHE ALLORA f è differenziabile in P_0

Per mostrarlo devo dim. che

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \xrightarrow{(x,y) \to (x_0,y_0)} 0$$

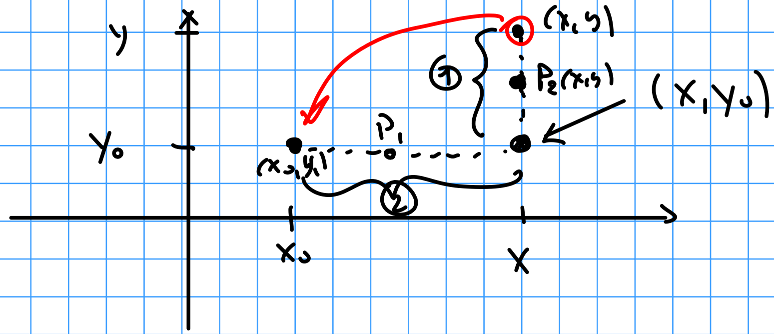
Consideriamo il numeratore

$$\Delta(x,y) = \underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0)}$$

$$\Delta(x_0, y_0) = 0$$

(devo dim. che $\frac{\Delta(x,y)}{\sqrt{\cdots}} \to 0$

$-\Delta(x_0, y_0)$



$$\Delta(x,y) = \underbrace{\Delta(x,y) - \Delta(x,y_0)}_{1} + \underbrace{\Delta(x,y_0) - \Delta(x_0,y_0)}_{2}$$

$$1 = \frac{\partial \Delta}{\partial y}(\xi)(y-y_0) = \quad \text{(Lagrange rispetto a } y\text{)}$$

(per un opportuno ξ compreso tra y_0 e y)

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right]_{y=\xi}(y-y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right)(y-y_0)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(P_2(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\right)(y-y_0)$$

$$2 = \frac{\partial \Delta}{\partial x}(\eta)(x-x_0) \quad \text{con } \eta \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\eta,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_1(x,y)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)(x-x_0)$$

SI VEDE CHE
$$\|P_1(x,y) - (x_0,y_0)\| \to 0$$
$$\|P_2(x,y) - (x_0,y_0)\| \to 0$$

INOLTRE

$$|\Delta(x,y)| \le |1 + 2| \le$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right| \underbrace{|x-x_0|}_{\le \|P-P_0\|} + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right| \underbrace{|y-y_0|}_{\le \|P-P_0\|} \le$$

$|x-x_0| \le \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

(schwarz)

$$\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(P_1)-\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right| \|P-P_0\| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(P_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right| \|P-P_0\|$$

e quindi

$$\left|\frac{\Delta(x,y)}{\|P-P_0\|}\right| \leq \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(P_1)-\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\right|}_{\to 0} + \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(P_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right|}_{\to 0}$$

$\left(\text{se } P\to P_0 \simeq (x,y)\to(x_0,y_0)\right)$

Se faccio tendere $P \to P_0$ ($P_1 \to P_0$, $P_2 \to P_0$) vedo l'espressione a destra TENDE A ZERO perché le derivate parziali sono continue #

<u>DEF.</u> che dico che f è $C^1(A)$ se f ammette derivate parziali continue su A <u>A aperto</u>

Dico anche $C^1(\bar{A})$ con A aperto se f è $C^1(A)$ e ogni $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ si prolunga a una funzione continua su $\bar{A}$

$\boxed{\text{Per esempio}}$ $f(x) = |x|^{3/2}$ è $C^1([0,1])$ in quanto f è $C^1(]0,1[)$ e $f'(x) = \frac{d}{dx} x^{3/2} = \frac{3}{2} x^{1/2} \to 0$ se $x\to 0$

IDEA: Se $P_0 \in \partial A$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{\substack{P\to P_1 \\ P\in A}} \frac{\partial f}{\partial x}(P)$

DIFF. TOTALE DICE " $C^1(A) \Rightarrow$ DIFF. IN A "

<u>PROPRIETÀ</u> (della differenziabilità e del differenziale)

(1) <u>LINEARITÀ</u> Se f e g sono differenziabili in x_0 e $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$

$\lambda_1 f + \lambda_2 g$ è diff. in x_0 e

$$d(\lambda_1 f + \lambda_2 g)(x_0) = \lambda_1 df(x_0) + \lambda_2 dg(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad J_{\lambda_1 f + \lambda_2 g}(x_0) = \lambda_1 J_f(x_0) + \lambda_2 J_g(x_0)$$

(b) – PRODOTTI ... $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto

(b1) Se $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad g : A \to \mathbb{R}$ differenziabili in $x_0 \in A$

$\Rightarrow h := fg$ è diff. in x_0 e

$$dh(x_0) = g(x_0)\, df(x_0) + f(x_0)\, dg(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad J_h(x_0) = g(x_0)\, J_f(x_0) + f(x_0)\, J_g(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \nabla h(x_0) = g(x_0) \nabla f(x_0) + f(x_0) \nabla g(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_0) = g(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + f(x_0) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) \qquad i = 1 \dots N}$$

(b2) $\quad f : A \to \mathbb{R}^M \qquad g : A \to \mathbb{R}$

$$h := g f \qquad h : A \to \mathbb{R}^M$$

Da (b1) si vede che

$$J_h(x_0) = \underset{\in \mathbb{R}^N}{\nabla g(x_0)} \otimes \underset{\in \mathbb{R}^M}{f(x_0)} + g\, J_f(x_0)$$

DOVE $\vec{a} \otimes \vec{b}$ = è la matrice che ha componenti

$$a_i b_j \qquad i = 1 \dots N \quad j = 1 \dots M$$

(b3) $\quad f, g : A \to \mathbb{R}^M \qquad h := f \cdot g \qquad h : A \to \mathbb{R}$

in termini di gradienti:

$$\nabla h(x) = \underbrace{J_f(x)^T}_{m\,(N \times M)} \underset{\in \mathbb{R}^M}{g(x)} + J_g^T(x)\, f(x)$$

$\in \mathbb{R}^N$

Infatti $h(x) = f \cdot g(x) = \sum_{j=1}^{M} f_j(x)\, g_j(x) \implies$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\, g_j(x) + f_j(x) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) =}$$

(c) (COMPOSIZIONE) $A \subset \mathbb{R}^N$ $B \subset \mathbb{R}^M$ A, B aperti

$f : A \to B$ $g : B \to \mathbb{R}^K$

$$\boxed{\begin{aligned} h &:= g \circ f \\ h(x) &:= g(f(x)) \end{aligned}}$$

$x_0 \in A$ $y_0 := f(x_0) \in B$

f differenziabile in x_0 g differenziabile in y_0

<u>ALLORA</u> h è differenziabile in x_0 e si ha

$$dh(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0) \iff$$

$$J_h(x_0) = \underbrace{J_g(y_0)\; J_f(x_0)}_{\text{PRODOTTO TRA MATRICI}}$$

$$(K \times N) \leftarrow (K \times M) \quad (M \times N)$$

<u>Dim (c)</u> (IDEA ...)

$$h(x) = g(f(x)) = g\big(f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)\big)$$

$$\left(\text{con } \frac{\sigma(x)}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0\right) = g\big(\underbrace{y_0 + df(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)}_{\substack{\text{lo chiamo } y \text{ e uso} \\ \text{la differenziabilità di } g \text{ in } y_0}}\big) =$$

$$g(y_0) + dg(y_0)\big(df(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)\big) + \sigma_1\big(df(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)\big)$$

$$\left(\text{con } \frac{\sigma_1(y)}{\|y - y_0\|} \xrightarrow{y \to x_0} 0\right) = \overset{h(x_0)}{g(y_0)} + dg(y_0)\, df(x_0)(x - x_0) +$$

$$dg(y_0)\, \sigma(x) + \sigma_1\big(df(x_0)(x - x_0) + \sigma(x)\big)$$

Si può dimostrare che l'espressione sottolineata è $o(\|X-X_0\|)$

$$\Rightarrow \quad h(x) = h(x_0) + \underbrace{dg(y_0)\, df(x_0)}_{}\,(x-x_0) + \sigma_2(x)$$

$$\left(\text{con} \quad \frac{\sigma_2(x)}{\|X-x_0\|} \to 0 \right) \quad \Longleftrightarrow \quad dh(x_0) = dg(y_0)\, df(x_0)$$

#

<u>CONSEGUENZA DI (C)</u> Sia come sopra $h(x) := g(f(x))$

$$\left(\text{dunque} \quad h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_K(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(f(x)) \\ \vdots \\ g_K(f(x)) \end{pmatrix} \right) \Longrightarrow$$

$i = 1 \dots N$

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_0) = \text{componente } i,j \text{ di } J_h(x_0) =$$

$$= \text{componente } i,j \text{ di } J_g(y_0)\, J_f(x_0) = \left(\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_r} \right) \left(\frac{\partial f_r(x)}{\partial x_i} \right)_{r=1 \dots M}$$

$$= \sum_{r=1}^{M} \frac{\partial g_j}{\partial y_r}(y_0) \frac{\partial f_r}{\partial x_i}(x_0)$$

Ho TROVATO

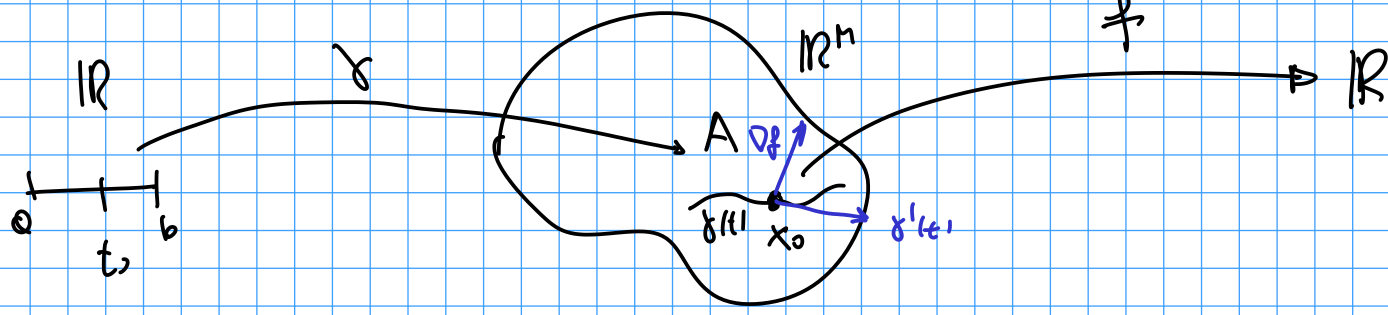
$$\boxed{\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{r=1}^{M} \frac{\partial g_j}{\partial y_r}(y_0) \frac{\partial f_r}{\partial x_i}(x_0)} \quad (\star)$$

$i = 1 \dots N \qquad j = 1 \dots K$

<u>CASO IMPORTANTE</u> (derivata lungo una curva)

- $\begin{cases} f : A \to \mathbb{R} & A \subset \mathbb{R}^M \quad x_0 \in A \\ f \text{ differenziabile in } x_0 \end{cases}$

- $\begin{cases} \gamma : [a,b] \to A & t_0 \in]a,b[\quad \gamma(t_0) = x_0 \\ \gamma \text{ è derivabile in } x_0 \end{cases}$



$\Rightarrow \quad f(\gamma(t)) = \varphi \qquad \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \varphi$ è derivabile in t_0 e

$$\varphi'(t_0) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=t_0}$$

USIAMO LA FORMULA ☆ (dove f ha il ruolo di g e γ ha il ruolo di f, $N=1$ $M=M$ $K=1$)

$$\varphi'(t) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\Big|_{t=t_0} = \sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial y_r} \frac{\partial \gamma_r(t)}{\partial t}$$

f_1, γ_r'

DUNQUE

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\gamma(t_0)) = \nabla f(\underbrace{x_0}_{\gamma(t_0)}) \cdot \gamma'(t)}$$