Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 15 30/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Ritorniamo sull'ultimo esempio (CORREZIONE!!)

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad f(0,0)=0$$

VOGLIO CALCOLARE LE DERIVATE DIREZIONALI IN $\mathbb{0} = (0,0)$

Prendo un vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$ e faccio

$$\frac{f(\mathbb{0}+t\vec{v}) - f(\mathbb{0})}{t} = \frac{1}{t} f(t\vec{v}) = \frac{1}{t} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2 v_x^2 + t^4 v_y^4} =$$

l'altra volta ho perso questo t

$$\frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \end{cases}$$

(perché se $v_x = 0$ l'espressione fa zero $\forall t \neq 0$)

DUNQUE

$$f'(0,0)(v_x,v_y) = \begin{cases} 0 & \text{se } v_x = 0 \\ \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \end{cases}$$

- SI VEDE CHE $f'(\mathbb{0})(\vec{v})$ NON È LINEARE IN $\vec{v}$
- COME GIÀ NOTATO f NON È CONTINUA IN $\mathbb{0}$

L'esistenza di $f'(x_0)(\vec{v})$ per ogni $\vec{v}$ NON IMPLICA LA CONTINUITÀ di f in x_0

ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{x y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$

- ABBIAMO GIÀ VISTO CHE f È CONTINUA IN $(0,0)$:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}|y| \le \frac{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2}|y| = \frac{|y|}{2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

- Provo a calcolare $f'(0)(\vec{v})$. Prendo $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

$$\frac{f(0+t\vec{v}) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{t} = \frac{f(t\vec{v})}{t} = \frac{1}{t}\,\frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2 v_x^2 + t^2 v_y^2} = \frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(0)(v_x,v_y) = \frac{v_x v_y^2}{v_x^2+v_y^2}}$$

NON È LINEARE IN $\vec{v}$

- Calcoliamo anche $f'(P)(v)$ per $P \neq 0$. QUINDI $P=(x_0,y_0)$, $t\neq 0$ e calcoliamo il "rapp. incr. lungo $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$"

$$\frac{f(P_0+t\vec{v}) - f(P_0)}{t} = \frac{1}{t}\left[\frac{(x_0+tv_x)(y_0+tv_y)^2}{(x_0+tv_x)^2+(y_0+tv_y)^2} - \frac{x_0 y_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right] =$$

$$\frac{1}{t}\,\frac{(x_0^2+y_0^2)(x_0+tv_x)(y_0+tv_y)^2 - x_0 y_0^2\left((x_0+tv_x)^2+(y_0+tv_y)^2\right)}{(x_0^2+y_0^2)\left((x_0+tv_x)^2+(y_0+tv_y)^2\right)}$$

e poi dovrei far tendere $t\to 0$ PERÒ QUESTO LIMITE CORRISPONDE ALLA DERIVATA IN $t=0$ DI

$$\varphi(t) = f(P_0+t\vec{v}) = \frac{(x_0+tv_x)(y_0+tv_y)^2}{(x_0+tv_x)^2+(y_0+tv_y)^2}$$

$$\varphi'(t) = \frac{\left(v_x(y_0+tv_y)^2 + (x_0+tv_x)2(y_0+tv_y)v_y\right)\left((x_0+tv_x)^2+(y_0+tv_y)^2\right)}{\left((x_0+tv_x)^2+(y_0+tv_y)^2\right)^2} + \dots$$

$$\dots \to \quad - (x_0+tv_x)(y_0+tv_y)^2\left(2(x_0+tv_x)v_x + 2(y_0+tv_y)v_y\right)$$

$$\varphi'(0) = \frac{(y_0^2 v_x + 2x_0 y_0 v_y)(x_0^2+y_0^2) - x_0 y_0^2 (2x_0 v_x + 2y_0 v_y)}{(x_0^2+y_0^2)^2} =$$

(raggruppo i termini con v_x e con v_y)

$$\frac{\left[(x_0^2+y_0^2)y_0^2 - 2x_0^2 y_0^2\right] v_x + \left[(x_0^2+y_0^2)2x_0 y_0 - 2x_0 y_0^3\right] v_y}{(x_0^2+y_0)^2} =$$

$$\boxed{\frac{(y_0^2 - x_0^2)y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} v_x + \frac{x_0^3 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} v_y}$$

← NOTO CHE È LINEARE IN $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

SI PUÒ ANCHE NOTARE CHE $f'(P)(\vec{v}) \xrightarrow{\text{se } P \to 0} f'(0)(\vec{v})$

(non lo dimostro ma segue dal fatto che se fosse

$$f'(P)(\vec{v}) \to f'(0)(\vec{v}) \Rightarrow \quad f'(0)(\vec{v}) \text{ sarebbe lineare in } \vec{v}$$

IN PARTICOLARE HO TROVATO (metto $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{(y_0^2 - x_0^2)y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0^3 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

QUESTO LO POSSO VEDERE PIÙ FACILMENTE DERIVANDO f rispetto a x e a y:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{TORNA}$$

stesso discorso con $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x y^2}{x^2+y^2} = \frac{2xy(x^2+\cancel{y^2}) - xy^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3 y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{TORNA}$$

OSS Se sapessi che $f'(P_0)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v} \Rightarrow$ BASTA CALCOLARE LE DERIVATE PARZIALI:

$$f'(P_0)(\vec{v}) = f'(P_0)(v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + \dots + v_N \hat{e}_N) =$$

$$v_1 f'(P_0)(\hat{e}_1) + v_2 f'(P_0)(\hat{e}_2) + \dots + v_N f'(P_0)(\hat{e}_N) =$$

$$v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0) + \dots + v_N \frac{\partial f}{\partial x_N}(P_0)$$

L'ULTIMO ESEMPIO CI DICE CHE

$f'(P)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v}$ $\boxed{\text{SE } P \neq 0}$

TUTTI QUESTI DISCORSI MOTIVANO LA SEGUENTE

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $x_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}^M$

DICO CHE f è <u>DIFFERENZIABILE</u> in x_0 se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tale che

$$(*) \quad \lim_{\underbrace{x \to x_0}_{\in \mathbb{R}^N}} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\| x - x_0 \|} = 0_M = \underbrace{(0 \dots 0)}_{M}$$

$\sigma(x) =$ NUMERATORE

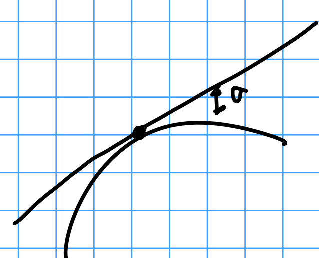
IN ALTRI TERMINI

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + \sigma(x) \qquad \text{dove} \qquad \frac{\sigma(x)}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0_M$$

f "SOMIGLIA" A UN'APPLICAZIONE AFFINE SE X VICINO A X_0

$y = y_0 + m(x - x_0)$ $\qquad m = f'(x_0)$

IN UNA VARIABILE



x_0

FATTO Se f è differenziabile in $x_0 \Rightarrow$ <u>f è continua in x_0</u>

INFATTI $\| f(x) - f(x_0) \| = \| L(x - x_0) + \sigma(x) \| \leq \| L(x - x_0) \|$

$$+ \|\sigma(x)\| = \|L(x - x_0)\| + \frac{\|\sigma(x)\|}{\|x - x_0\|} \|x - x_0\| \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

OSS. Se f è differenziabile allora posso considerare il limite $(*)$ sulle rette (da destra)

$$\Rightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N, \vec{v} \neq 0 \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0) - L(x_0+t\vec{v}-x_0)}{\| x_0+tv-x_0 \|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t\vec{v}) - f(x_0) - tL\vec{v}}{t\,\|\vec{v}\|} = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{SEMPLIFICO}\\ \|\vec{v}\| \neq 0\end{matrix}\right)$$

qui uscirebbe $|t|$ - MA STO CONSIDERANDO $t > 0$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = L\vec{v}$$

Dato che la formula sopra vale per ogni $\vec{v}$ posso scriverla per $-\vec{v}$ $\rightarrow$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 - t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = L\vec{v} \qquad \text{cambio } -t = \tau$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\tau \to 0^-} \frac{f(x_0+\tau\vec{v}) - f(x_0)}{-\tau} = -L\vec{v}$$

$$\lim_{\tau \to 0^-} \frac{f(x_0+\tau\vec{v}) - f(x_0)}{\tau} = L\vec{v}$$

DUNQUE

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t\vec{v}) - f(x_0)}{t} = L\vec{v} \qquad \text{CIOÈ:}$$

Se f è differenziabile in x_0 e L è come nella formula $(*)$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} \exists\ f'(x_0)(\vec{v}) \text{ per ogni } \vec{v} \text{ e vale} \\ L\vec{v} = f'(x_0)(\vec{v}) \end{matrix}\right] \quad (!!!)$$

NE DEDUCO (1) Se L_1 e L_2 rendono vera la $(*)$

$$\Rightarrow L_1\vec{v} = L_2\vec{v} \quad \forall \vec{v} \quad \text{quindi}$$

• SE f è differenziabile c'è una UNICA APPL. LINEARE L tale che valga la $(*)$. DICO ALLORA CHE

L è IL DIFFERENZIALE di f in x_0

e lo denoto con $\boxed{df(x_0)}$. IN QUESTO CASO

f è derivabile in $\vec{v}$ per ogni $\vec{v}$ e

$$f'(x_0)(\vec{v}) = df(x_0)(\vec{v})$$

(in particolare $f'(x_0)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v}$)

Def. CHIAMO "IPERPIANO TANGENTE" il GRAFICO DI

$$z = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$$

ESEMPIO $f(x) = xy$ ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) $P_0 = (1,1)$

Mi chiedo se f sia differenziabile in P_0. Devo verificare $(*)$, cioè se esiste un tale L

$$\to \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - L(P - P_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

Che L devo mettere ?? Se L esiste so che (per quanto sopra)

$$L\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = f'(P_0)(v_x, v_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)v_y$$

DUNQUE per vedere se f è differenziabile DEVO vedere se

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)}{\|P - P_0\|} = 0$$

cioè
$$\lim_{H\to 0} \frac{f(P_0+H) - f(P_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)h_2}{\|H\|}$$
$$(H = (h_1, h_2))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(x_0+h_1)(y_0+h_2) - x_0y_0 - y_0h_1 - x_0h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial xy}{\partial x} = y \quad \frac{\partial xy}{\partial y} = x\right) \quad \left(L(h_1,h_2) = y_0h_1 + x_0h_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$ ⇐ VERA dato che

$$\left|\,\cdot\,\right| \le \frac{\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{h_1^2+h_2^2} \to 0$$

DUNQUE LA funzione $f(x,y) = xy$ è differenziabile in ogni punto (x,y) e si ha

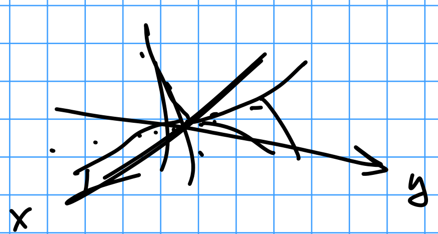
$$df(x,y)(v_x, v_y) = y\,v_x + x\,v_y \qquad \forall \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

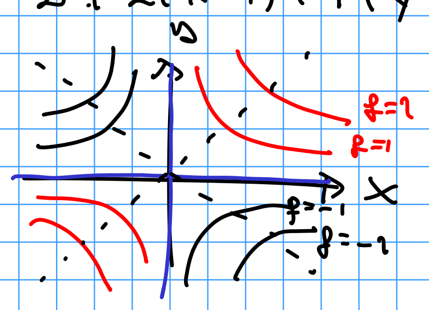
VEDIAMO L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE IN $P_0 = (1,1)$ $\Longrightarrow$

$$\underline{z = (x_0 y_0) + y_0(x-x_0) + x_0(y-y_0)}$$ nel caso $(1,1)$

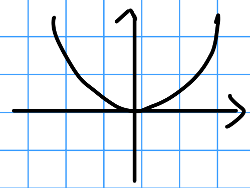
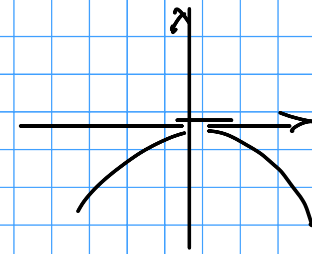
$$z = 1 + (x-1) + (y-1) = -1 + x + y$$

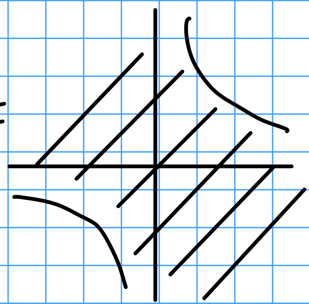
nel punto $\underline{(1,2)}$ $\quad z = 2 + 2(x-1) + 1(y-2) = \underline{-2 + 2x + y}$





← LINEE DI LIVELLO DI $f = xy$

IN $x = y$ ved  IN $x = -y$ VED 

$\{f \le 1\} =$ 

Teorema (del differenziale totale).

Sia $f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N$ aperto $\quad x_0 \in A$.

Supponiamo che $\exists \; \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \quad \forall i = 1 \dots N \quad \forall x \in A$

Supponiamo che $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ siano CONTINUE IN x_0, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \qquad i = 1 \dots N$$

ALLORA f è differenziabile in x_0

(La dim. la faccio la prossima volta)

Se torno all'esempio $f(x,y) = xy$ POSSO APPLICARE IL TEOREMA:

$$\frac{\partial}{\partial x} xy = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \Leftarrow \text{SONO CHIARAMENTE CONTINUE}$$

TUTTI I CONTI DI PRIMA SONO SUPERATI

$\Rightarrow \quad \exists \; df(x,y)$ e vale $\quad df(x,y)(v_x, v_y) = y v_x + x v_y$

SE $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è lineare $\Rightarrow L$ si rappresenta con una matrice A $M \times N$:

$$L(\vec{v}) = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

Se $L = d f(x_0)$, da quanto detto sopra, si vede che

$$L \vec{v} = \underset{\in \mathbb{R}^M}{v_1 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}} + \dots + \underset{\in \mathbb{R}^M}{v_N \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_N}} \iff$$

L si rappresenta mediante la matrice

$$J_f = \underbrace{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1} & \frac{\partial f_M}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & & \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{array} \end{array}}_{N \text{ colonne}} \Bigg\} M \text{ righe}$$

$$d f(x_0) \vec{v} = J_f(x_0) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

$J_f(x_0)$ si chiama MATRICE JACOBIANA DI f in X_0

Nel caso $M=1$ chiamo GRADIENTE di f il vettore

$$\nabla f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N \quad \left(\nabla f(x_0) = {}^T J_f(x_0) \right)$$

In questo caso, se f è differenziabile,

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \sigma(x)$$

con $\frac{\sigma(x)}{\|x\|} \xrightarrow{x \to x_0} 0$