Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 14 29/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Punto di vista diverso riguardo alle curve:

PARTO DA UN INSIEME $S \subset \mathbb{R}^N$

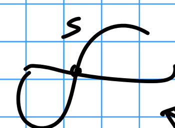
Def. Dico che S è "una curva" se esiste $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ tale che

(a) γ è C^1, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in I$

(b) $\gamma(I) = S$

$\Big\}$ γ è una curva con sostegno S

(c) γ è bigettiva su $\mathring{I}$

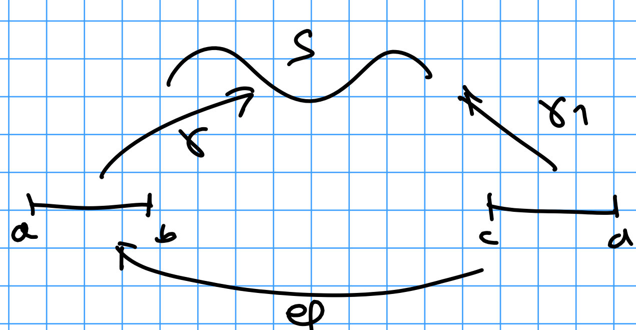


NON È UNA CURVA IN QUESTO ULTIMO SENSO

SE UTILIZZO QUESTA NOZIONE $\to$ PROPRIETÀ

(1) Se γ_1 e γ verificano le (a) (b) (c) $\Rightarrow$ esiste un cambio di parametro che fa passare da γ a γ_1

φ C^1 con $\varphi' \neq 0$



$$\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$$

DUNQUE POSSO DEFINIRE GLI INTEGRALI CURVILINEI

(I / II specie) $\int_S f\,ds = \int_\gamma f\,ds$ dove γ verifica (a) (b) (c)

(2) Dato S come sopra risultano definiti:

(i) gli estremi di S – SE TROVO γ BIGETTIVA $\gamma : [a,b] \to S$. Gli estremi di S sono: punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$

NON È possibile dire chi è l'estremo destro e quello sinistro – se cambio parametrizzazione $\to$ gli estremi possono scambiarsi.

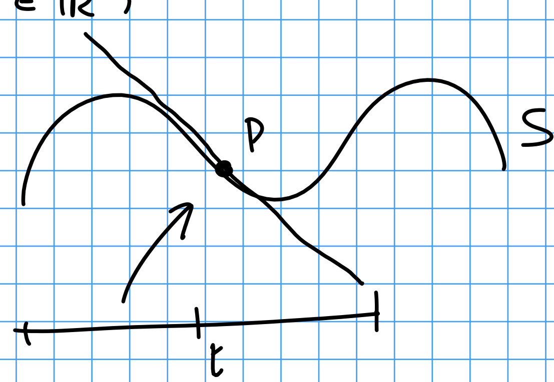
(ii) Se invece esiste $\gamma : [a,b] \to S$ $\gamma(a) = \gamma(b)$ dico che S è un arco chiuso (e non ho estremi)

(3) Dato S come sopra posso definire la RETTA TANGENTE in ogni punto $P \in S$:

(1) Prendo $\gamma : I \to S$ che verifica (a) (b) e (c)

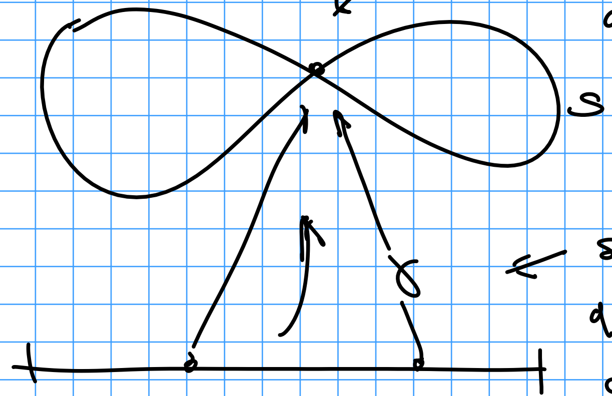
(2) prendo $t \in I$ tale che $\gamma(t) = P$ (t esiste unico)

(3) definisco la retta tangente in P ponendo $\{\gamma(t) + \lambda\gamma'(t) : \lambda \in \mathbb{R}\}$



QUESTE DEF. NON DIPENDONO DA γ

NON C'È RETTA TANGENTE — SE VEDO S come dello oro



se lo vedo come applicazione questo ha retta tangente in ogni t

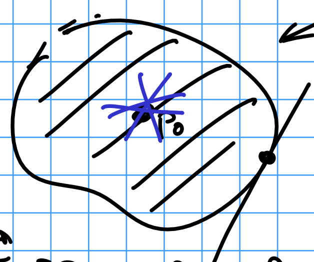
Ci sarà utile:

DEF. Dato un $A \subset \mathbb{R}^N$ e un punto $P \in A$ posso definire le "DIREZIONI TANGENTI" AD A in P:

$\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ è una dir. tang. ad A in P **SE** esiste $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to A$ $\quad \varepsilon > 0 \quad \gamma \in C^1$ t.c.

$\gamma(0) = P \qquad \gamma'(0) = \vec{v}$

IN P_0 ogni $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ è una dir. tang.



Nota • $\vec{v} = 0$ sempre tangente $\quad (\gamma(t) = P \quad \forall t)$

• se $\vec{v}$ è tangente $\Rightarrow$ $\lambda \vec{v}$ è tangente

(se $\gamma(0) = P \quad \gamma'(0) = \vec{v}$ prendi

$\gamma_1(t) = \gamma(\lambda t) \Rightarrow \gamma_1(0) = P$; $\gamma_1'(0) = \lambda \gamma'(0) = \lambda \vec{v}$

• NON È DETTO che le direzioni tangenti siano uno spazio vettoriale $\Leftarrow$ CI VUOLE QUALCOSA SU A

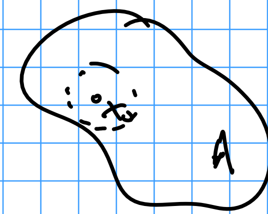
DERIVATE DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

??

INGREDIENTI $A \subset \mathbb{R}^N$ $\quad f: A \to \mathbb{R}^M$ $\quad x_0 \in A$

A aperto

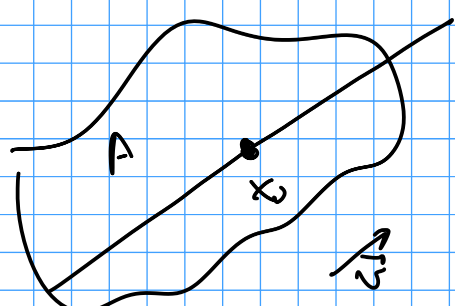
Voglio poter arrivare a x_0 da tutte le direzioni



Def. (derivata direzionale) Dato un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^N$ dico che f è derivabile in x_0 nella direzione $\vec{v}$ se esiste il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(x_0)}{t} \qquad \left(=: \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata di } f \text{ in } x_0 \\ \text{lungo } \vec{v}}}{f'(x_0)(\vec{v})} \right)$$

($f'(x_0)(\vec{v})$ è la derivata in $t=0$ della funzione $\varphi(t) = f(x_0 + t\vec{v})$ cioè la "restrizione" di f sulla retta passante per x_0 con direzione $\vec{v}$)



oss f è sempre derivabile lungo il vettore $\vec{v} = 0$ e $f'(x)(\vec{0}) = 0$

Def. Chiamo derivate parziali le derivate direzionali rispetto ai vettori $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ della base canonica e indico

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'(x_0)(\hat{e}_i) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\hat{e}_i) - f(x_0)}{t}$$

$$\left(\hat{e}_i = (0 \cdot\cdot \overset{\overset{i}{\downarrow}}{1} \cdot\cdot 0) \right) \qquad = \text{derivata di } f(x_{0,1} \dots x_{0,N}) \text{ rispetto alla variabile } x_i$$

PER ESEMPIO

$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 2xy$$

Se $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ $\qquad X_0 = (1,1)$

$$f'(x_0)(\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(f(x_0 + t\vec{v}) \right)\Big|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}\left((1+tv_x)^2 - 3(1+tv_y)^2 + 2(1+tv_x)(1+tv_y) \right)\Big|_{t=0}$$

$$= 2(1+tv_x)v_x - 3\cdot 2(1+tv_y)v_y + 2v_x(1+tv_y) + 2(1+tv_x)v_y\Big|_{t=0}$$

$$= 2v_x - 6v_y + 2v_x + 2v_y = \boxed{4v_x - 4v_y} \quad (*)$$

$$f'(1,1)(v_x, v_y) = 4v_x - 4v_y$$

IN PARTICOLARE $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = f'(x_0)(\hat{e}_1) = 4$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4$$

POSSO ANCHE CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivando f rispetto a x e rispetto a y $\longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3y^2 + 2xy) = 2x + 2y \xrightarrow{x=1,\,y=1} \frac{\partial}{\partial x}f(1,1) = 4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 3y^2 + 2xy) = -6y + 2x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4$$

NELL'ESEMPIO VEDO CHE

$$f'(x_0)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f'(x_0)(\vec{v}_1) + f'(x_0)(\vec{v}_2)$$

$(*)$ $4v_x - 4v_y$ è LINEARE RISPETTO A $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

PERÒ QUESTA PROPRIETÀ **NON** È SEMPRE VERA

ESEMPIO

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(0,0)=0$$

VEDIAMO LE DERIVATE PARZIALI IN $(0,0)$ $\to$

dato che $f(0,y)=0$, $f(x,0)=0$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Dunque f ammette derivate parziali in $(0,0)$

MA abbiamo già visto che f NON è CONTINUA IN $(0,0)$

ESEMPIO

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = f(x,y) \qquad f(0,0)=0$$

$x = t v_x \quad y = t v_y$

CERCHIAMO $f'(\vec{0})(\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\vec{v})}{t} =$

$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2 v_x^2 + t^4 v_y^4} = \lim_{t\to 0} \boxed{\frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{v_y^2}{v_x} & \text{se } v_x \neq 0 \\ 0 & \text{se } v_x = 0 \end{cases}$$

NON È LINEARE RISPETTO A $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

IN QUESTO CASO

$f(t\cdot 0, t v_y) = 0 \quad \forall t>0$

a causa del numeratore

$\Rightarrow \exists\, f'(\vec{0})(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$

MA ANCHE IN QUESTO CASO f NON È CONTINUA IN $(0,0)$!!!