Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 13 28/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

I° COMPITINO : Lunedì 25/11 ore 17.30 - 19.00
AULA B21 PRENOTARSI SUL SITO DEGLI ESAMI

CURVE E INTEGRALI CURVILINEI

Grafici Se $f: I \to \mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Il grafico di f è l'insieme

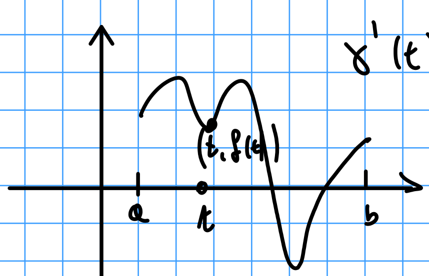
$$G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, \ y = f(x)\}$$

Supponiamo f di classe C^1 (derivabile, f' continua)

$\Rightarrow$ $G(f)$ è sostegno della curva $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ $\leftarrow \gamma_f$

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \qquad t \in I$$

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))$$



IN QUESTO MODO posso considerare l'integrale curvilineo su $G(f)$ $\int_{\gamma_f} g \, ds$:

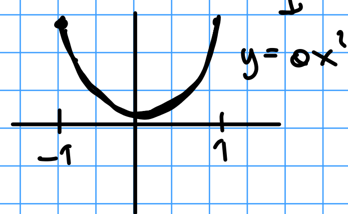
Se g è definito su $G(f)$, g è continuo

$$\int_{G(f)} g \, ds = \int_{\gamma_f} g \, ds = \int_I g(t, f(t)) \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$$

In particolare $(g = 1)$ la lunghezza del grafico di f è:

$$\ell(G(f)) = \int_I \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$$

Per esempio



$f(x) = ax^2 \quad (a > 0)$

per $-1 \le x \le 1$

$\Rightarrow$ la lunghezza di questo arco di parabola è

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (2ax)^2} \, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4a^2x^2} \, dx = \circledast$$

potrei usare $2ax = \sinh(\theta)$ – OPPURE (trucco con l'integrazione per parti)

$$\circledast = \int_{-1}^{1} \frac{1 + 4a^2x^2}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} \, dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}} + \int_{-1}^{1} x \underbrace{\frac{4a^2x}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}}}_{\frac{d}{dx}\sqrt{1+4a^2x^2}} dx$$

$$\frac{1}{2a} \int_{\operatorname{arcsinh}(-2a)}^{\operatorname{arcsinh}(2a)} \frac{\cosh(\theta) \, d\theta}{\sqrt{1 + \sinh^2\theta}} \quad \begin{pmatrix} 2ax = \sinh(\theta) \\ 2a\,dx = \cosh(\theta)\,d\theta \end{pmatrix} +$$

per parti

$$\left[x\sqrt{1 + 4a^2x^2} \right]_{-1}^{1} - \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4a^2x^2} \, dx}_{= \circledast} \iff$$

$$2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4a^2x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \int_{\operatorname{arcsinh}(-2a)}^{\operatorname{arcsinh}(2a)} 1 \, d\theta + 2\sqrt{1 + 4a^2} =$$

$$\frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}(2a) + 2\sqrt{1 + 4a^2} \Rightarrow \circledast = \frac{1}{2a} \operatorname{arcsinh}(2a) + \sqrt{1 + 4a^2}$$

• Se uso l'altro sistema: $2a x = \sinh(\theta)$ in

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+4a^2x^2}\, dx \Rightarrow$$

$$\text{SIMMETRIA} \rightarrow 2\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2a)} \sqrt{1+\sinh^2\theta}\ \frac{\cosh(\theta)}{2a}\, d\theta = \frac{1}{a}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2a)} \cosh^2\theta\, d\theta = ✪$$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

$\sinh^2\theta = \cosh - 1$

(formula analoga a quella trigonometrica:

$$\cosh(2\theta) = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta = 2\cosh^2\theta - 1 \Leftrightarrow$$

$$\cosh^2(\theta) = \frac{\cosh(2\theta)+1}{2} \quad)$$

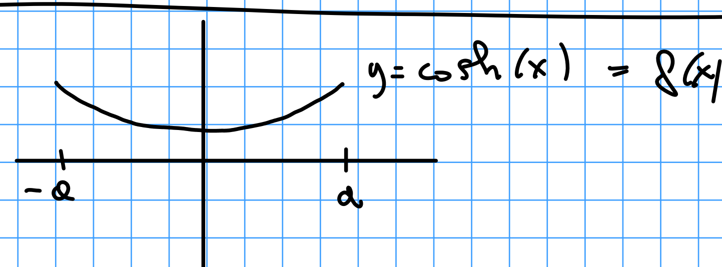
$$✪ = \frac{1}{a}\int_0^{\operatorname{arcsinh}(2a)} \frac{\cosh(2\theta)+1}{2}\, d\theta = \frac{1}{a}\left[\frac{\sinh(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\operatorname{arcsinh}(2a)} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\sinh\theta\cosh(\theta)}{2} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\operatorname{arcsinh}(2a)} =$$

$$\frac{1}{\cancel{a}}\ \frac{2\cancel{a}\cdot\cosh(\operatorname{arcsinh}(2a))}{\cancel{2}} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2a)}{2a} =$$

$$\sqrt{1+4a^2} + \frac{\operatorname{arcsinh}(2a)}{2a}$$

Altro esempio

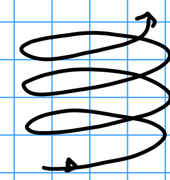


$$\text{lunghezza} \rightarrow \int_{-a}^{a} \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx \Rightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+\sinh^2(x)}\, dx = \int_{-a}^{a} \cosh(x)\, dx = 2\left[\sinh(x)\right]_0^a = 2\sinh(a)$$

Altri esempi (in $\mathbb{R}^3$)

$$\gamma(t) = (R\cos(t),\ R\sin(t),\ a\,t)$$



("elica")

Calcoliamo la lunghezza del tratto di curva per $0 \le t \le 2\pi$

$$\gamma'(t) = (-R\sin(t),\ R\cos(t),\ a) \Rightarrow$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t) + a^2} = \sqrt{R^2+a^2} \leftarrow \text{costante in } t$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = 2\pi\sqrt{R^2+a^2}$$

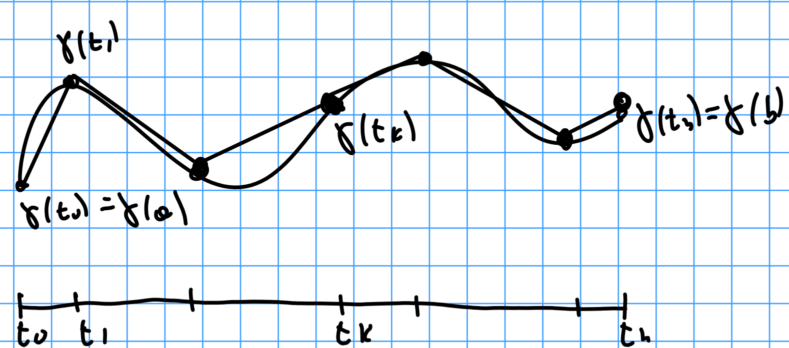
DEFINIZIONE "GEOMETRICA" di lunghezza

Def. Data una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ (non chiedo nulla - neanche che γ sia continua). Definisco

$$\ell_G(\gamma) = \sup_{\sigma \text{ suddivisione di } [a,b]} \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|}_{L(\sigma)} \quad (\in [0,+\infty])$$

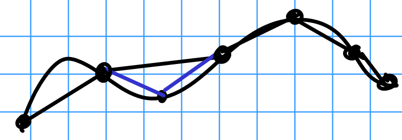
(lunghezza geometrica)

σ suddivisione $\to$ $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$



OSS. Se σ è una suddivisione, $\bar{t} \in I$ e $\bar{\sigma} = \sigma \cup \{\bar{t}\}$ (aggiungo $\bar{t}$ alla suddivisione σ) $\Rightarrow$

$L(\sigma) \leq L(\bar{\sigma})$



$\bar{t}$

<u>Teorema</u> Se γ è di classe C^1 su $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\ell_G(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \qquad \left(= \ell(\gamma)\right)$$

<u>Non lo dimostro</u>. DUNQUE se γ è C^1: $\ell_G(\gamma) = \ell(\gamma)$

D'ORA IN POI SCRIVO SOLO $\ell(\gamma)$ invece di $\ell_G(\gamma)$

TANTO NON C'È AMBIGUITÀ

<u>Def.</u> Si dice che γ è <u>RETTIFICABILE</u> se $\ell(\gamma) < +\infty$

<u>OSS</u> POSSONO ESISTERE

(a) curve continue di lunghezza infinita

(b) curve discontinue di lunghezza finita

NON C'È LEGAME TRA CONTINUITÀ E RETTIFICABILITÀ

<u>FATTO</u> Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ e $c \in [a,b]$ allora

posso considerare $\gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2\ [c,b] \to \mathbb{R}^N$

le restrizioni $\Rightarrow$ $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$. Allora

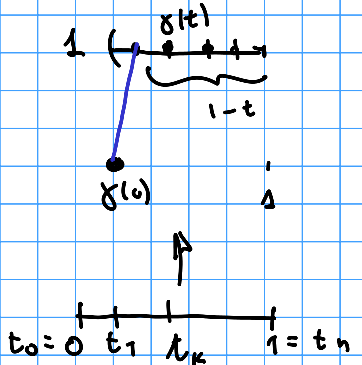
$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$$

(si deduce, abbastanza facilmente, dalla definizione geometrica)

VEDIAMO L'OSSERVAZIONE SOPRA

(b) Curve discontinue con lunghezza finita.

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t,1) & \text{se } t \in]0,1] \\ (0,0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$



Calcolo la lunghezza di γ.

Prendo $\sigma = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$ suddivisione di $[0,1]$. Calcolo

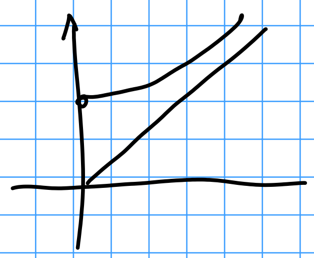
$$L(\sigma) = \|\gamma(t_1)-\gamma(t_0)\| + \underbrace{\sum_{i=2}^{n} \|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|}_{\text{tutti allineati}}$$

$$\|(t_1, 1)-(0,0)\| + (1-t_1) =$$

$$\sqrt{1+t_1^2} + 1 - t_1$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \sup_{t\in]0,1]} \Big(\underbrace{\sqrt{1+t^2} + 1 - t}_{\varphi(t)}\Big)$$

$$\varphi'(t) = \frac{\cancel{2}t}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}} - 1 = \frac{t-\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} < 0 \quad (\forall\, t \in$$

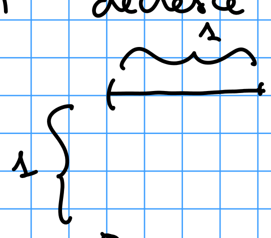


$t < \sqrt{1+t^2}$ $\quad t>0$

$\Updownarrow$

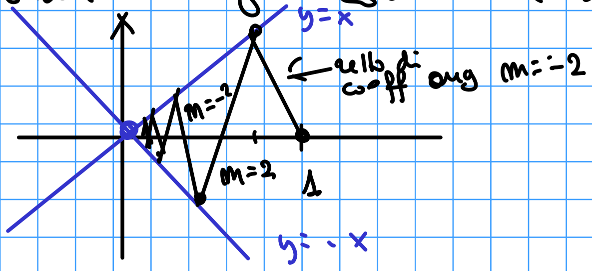
$t^2 < 1+t^2$ $\quad$ VERO

$\Rightarrow \varphi(t)$ decresce per $t>0$ $\Rightarrow \sup_{t>0} \varphi(t) = \varphi(0) = 2$



← LUNGHEZZA = 2 (ma γ è discontinua)

(a) Costruisco γ come nel disegno:



← OTTENGO UNA SUCCESSIONE DI SPEZZATE

VEDO CHE LA CURVA COSÌ

COSTRUITA È COMPRESA TRA LE DUE RETTE $y=x$, $y=-x$

POSSO PARAMETRIZZARE QUESTA SPEZZATA per $t \in]0,1]$

e vedo che $\lim_{t\to 0^+} \gamma(t) = (0,0)$ $\Rightarrow$ ESTENDO

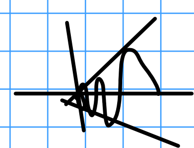
$\gamma(t)$ ponendo $\gamma(0) = (0,0)$ $\Rightarrow$ $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

FACENDO I CONTI SI VEDE CHE

$$\ell(\gamma) = \sum_{\substack{\uparrow \\ \text{spezzate}}} \ell(\gamma_j) = +\infty$$

(mi dà una serie divergente) $\simeq \sum \frac{1}{n}$

QUANDO LA CURVA È $C^1([a,b])$ NON CI SONO PROBLEMI $\to$ γ è rettificabile e $\ell(\gamma) = \int \|\gamma'\| d$

($C^1(]a,b[)$ NON basterebbe )

INTEGRALI CURVILINEI DI II^a SPECIE (≈ lavoro).

Stavolta si integra un "campo vettoriale"

Def. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ una curva C^1. Sia $\vec{f} : S \to \mathbb{R}^N$ dove $S = \gamma([a,b])$ = sostegno di γ. $\vec{f}$ CONTINUA

Pongo
$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

VARIE PROPRIETA' (analoghe a quelle del I° – CON QUALCHE ECCEZIONE)

(a) $\int_\gamma (\alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2) \cdot d\vec{s} = \alpha \int_\gamma \vec{f}_1 \cdot d\vec{s} + \beta \int_\gamma \vec{f}_2 \cdot ds$ (LINEARITÀ)

(b) $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{s}$

(γ_1 e γ_2 contigue - consecutive)

(c) Se γ_1 è ottenuta da γ mediante un cambio di parametro φ C^1 ($\varphi : [c,d] \to [a,b]$, φ bigettiva e φ C^1)

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \begin{cases} \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} & \text{se } \varphi \text{ mantiene il verso} \\ -\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} & \text{se } \varphi \text{ cambia il verso} \end{cases}$$ (?)

(?) Dato che φ è bigettiva $\Rightarrow$ φ è strettamente monotona

DUNQUE CI SONO DUE CASI

- φ STRETT. CRESCENTE $\Leftrightarrow \varphi' \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(c) = a, \varphi(d) = b$ ← φ MANTIENE IL VERSO
- φ " DECRESCENTE $\Leftrightarrow \varphi' \leq 0 \Leftrightarrow \varphi(c) = b, \varphi(d) = a$ ← φ CAMBIA VERSO

(idea $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ è il "lavoro" del campo di forze $\vec{f}$ lungo la curva γ.)

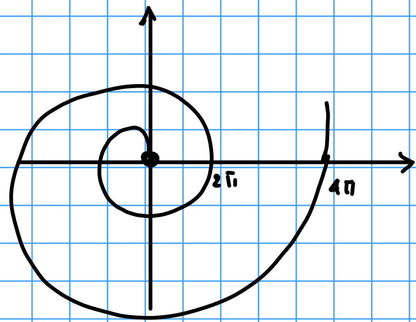
(d) Si ha:

$$\left| \int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \right| \leq \max_{x \in S} \|f(x)\| \cdot \ell(\gamma)$$

$$\left(\int_a^b \vec{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \leq \int_a^b \|\vec{f}(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt \leq \max \|\vec{f}\| \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \max \|\vec{f}\| \cdot \ell(\gamma) \right)$$

Ancora un esempio di curva in $\mathbb{R}^2$: LA SPIRALE ARCHIMEDEA:

$\gamma(t) : t(\cos(t), \sin(t)) \qquad t \geq 0$



$$\gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t))$$

$(\gamma'(0) = (1,0))$

Proviamo a calcolare la lunghezza del tratto di curva tra $t=0$ e $t=2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2} \, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + t^2 \sin^2 t - \cancel{2t\sin t\cos t} + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + \cancel{2t\sin(t)\cos t}} \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2} \, dt \Leftarrow \text{VISTO PRIMA } \left(a = \tfrac{1}{2}\right)$$

OSS. Supponiamo che $\|\gamma(t)\|$ sia costante ($\gamma(t)$ VIAGGIA SULLA SFERA). Suppongo anche γ derivabile. DUNQUE:

$$\|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t) = c \Leftarrow \text{derivo in } t$$

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|^2} = \gamma'(t) \cdot \gamma(t) + \gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 2\gamma(t) \cdot \gamma'(t)$$

$\Rightarrow \gamma'(t)$ è ortogonale a $\gamma(t)$ per ogni t

FATTO $\frac{d}{dt}(\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)) = \gamma_1'(t) \cdot \gamma_2 + \gamma_1(t) \cdot \gamma_2'$

Si vede facilmente passando alle componenti