Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 12 23/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

CURVE (e integrali curvilinei)

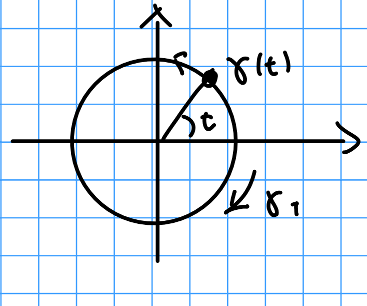
Def. Chiamo CURVA una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ dove I è un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Tipicamente $I = [a,b]$

Chiamo SOSTEGNO di γ l'insieme $\gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$

Il sostegno è "l'insieme dei punti percorsi dalla curva" - dove solo il sostegno non è sufficiente a dare la curva

ESEMPIO $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Il sostegno di γ è la circonferenza $S = \{x^2+y^2=1\}$



Anche $\gamma_1(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ ha lo stesso sostegno - PERÒ "gira in verso contrario a γ"

Anche $\gamma_2(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$ descrive S se $0 \le t \le \sqrt{2\pi}$

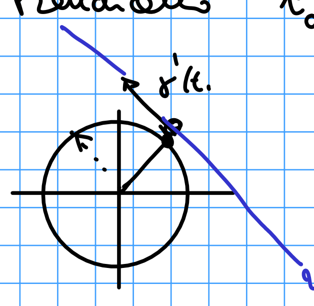
- Naturalmente ha senso parlare di curve continue (cioè ogni componente $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_N$ è una funzione continua da $I \to \mathbb{R}$.
- Ha anche senso dire che γ è $C^1, C^2 \dots C^k \dots C^\infty$ nel senso che ogni componente $\gamma_1 \dots \gamma_N$ è una funzione derivabile $1, 2, \dots, k \dots \infty$ volte con tutte le derivate continue, CHIAMO $\gamma', \gamma'' \dots \gamma^{(k)}$ le derivate.
- Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si dicono ESTREMI DI γ
- DICO CHE γ è una curva chiusa se $\gamma : [a,b]$ e se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- DICO CHE γ è <u>regolare</u> se γ è C^1 e se $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ $(\|\gamma'(t)\| \neq 0)$
- <u>OSS</u> Se γ è $C^1 \Rightarrow \gamma'(t)$ rappresenta la <u>velocità</u> del punto mobile $\gamma(t)$ nell'istante t.

Lo direzione di $\gamma'(t)$ è "LA DIREZIONE TANGENTE" alla curva γ nel punto $\gamma(t)$

<u>Per esempio</u> Se $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \Rightarrow$ CI VUOLE $\gamma'(t) \neq 0$

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$$

Prendiamo $t_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \gamma(t_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



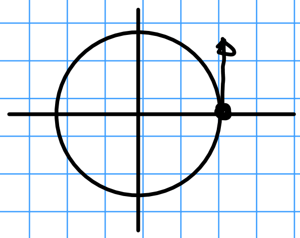
$$\gamma'(t_0) = \left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

retta tangente alla curva in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Se per esempio considero $\gamma_2(t) = (\cos(t^2), \sin(t^2))$

IL SOSTEGNO È SEMPRE LA CIRCONFERENZA

Se $t=0 \Rightarrow \gamma(0) = (1,0) = \gamma_2(0)$



Se considero $\gamma'(0) = (0,1)$

Se faccio $\gamma_2'(t) = 2t\left(-\sin(t^2), \cos(t^2)\right)$

e $\gamma_2'(0) = 0$

NO PERDO LA DIREZIONE TANGENTE

γ_2 NON È REGOLARE

Def. Dico che γ_1 è una riparametrizzata di γ / γ_1 si ottiene da γ mediante una riparametrizzazione (o cambio di parametro), se

$$\gamma_1 = \gamma \circ \varphi \qquad \text{dove} \quad \gamma : I \to \mathbb{R}^N, \quad \varphi : J \to I$$

$$\Rightarrow \gamma_1 : J \to \mathbb{R}^N$$

dove I e J sono intervalli e φ è bigettiva.

IN QUESTO CASO φ è il cambio di parametro (o riparametr...)

Per esempio γ_2 è riparametrizzata di γ (ESEMPI SOPRA)

$\varphi(t) = t^2 \qquad I = [0, 2\pi] \qquad J = [0, \sqrt{2\pi}]$

OSS. Se γ_1 è riparametrizzata di $\gamma \Rightarrow$ le due curve hanno lo stesso sostegno.

Fatto Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è regolare e $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ è bigettiva, C^1 e φ^{-1} C^1. Sia $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

Allora anche γ_1 è regolare. ANZI: $\varphi'(t) \neq 0$ e vale

($\varphi' \neq 0$ perché φ^{-1} è derivabile)

$$\boxed{\gamma_1'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(\varphi(t)) = \varphi'(t)\,\gamma'(\varphi(t))}$$

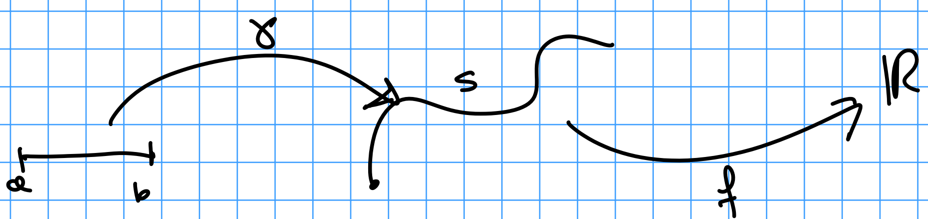
$\Rightarrow$ Se riparametrizzo una curva regolare (con φ come sopra) $\Rightarrow$

LA RETTA TANGENTE NON CAMBIA

Definizione (INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE)

Considero una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^1

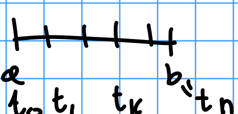
Considero una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ dove $S =$ sostegno di γ ; f CONTINUA.

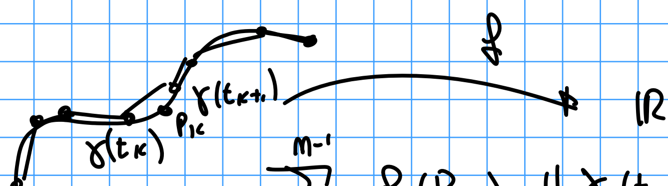


Definisco

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|}_{\text{CONTINUA SU } [a,b] \to \text{ INTEGRABILE}}\,dt$$

IDEA





$$\sum_{k=0}^{M-1} f(P_k)\, \frac{\|\gamma(t_{k+1})-\gamma(t_k)\|}{t_{k+1}-t_k}\, \overset{\sim dt}{(t_{k+1}-t_k)}$$

è un $\gamma(\xi_k)$ con $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$

MORALMENTE

$$\int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt$$

Proprietà Se $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ è un cambio di parametro C^1 (φ derivabile φ' CONTINUA) (φ biiettiva). Sia $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ ALLORA

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_\gamma f\,ds$$

Dim. $\displaystyle\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_c^d f(\gamma_1(\tau))\|\gamma_1'(\tau)\|\,d\tau =$

$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(\tau)))\left\|\frac{d}{d\tau}\gamma(\varphi(\tau))\right\|\,d\tau =$$

$$\int_c^d f(\gamma(\varphi(\tau)))\,\|\gamma'(\varphi(\tau))\|\,|\varphi'(\tau)|\,d\tau =$$

USO IL CAMBIO DI VARIABILE $t = \varphi(\tau)$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_\gamma f\,ds \qquad \#$$

L'INTEGRALE NON DIPENDE DALLA RIPARAM.
ANCHE SE CAMBIO VERSO

__Def.__ Chiamo __lunghezza__ di γ ($\gamma \in C^1$) l'integrale della funzione UNO CIOÈ

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

__ESEMPIO__ $\gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t))$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|(-R\sin(t), R\cos(t))\|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}\,dt =$$

$$R\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi R$$

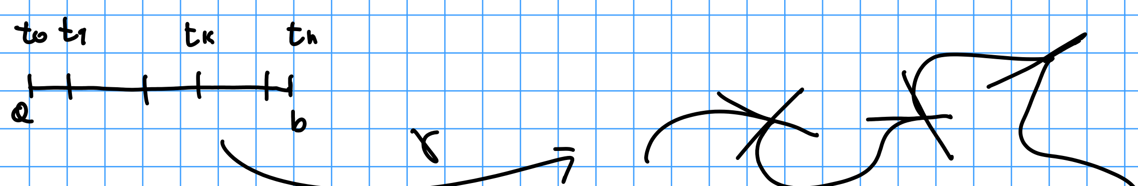
- CONVIENE CONSIDERARE UNA GENERALIZZAZIONE:

__Def.__ Dico che una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è __C^1 a tratti__,

se γ è __CONTINUA__ e

esistono $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ $\quad a = t_0,\ t_n = b$ tali che

γ è C^1 su $[t_k, t_{k+1}]$ $\quad k = 0, \dots, n-1$



($\Rightarrow$ in ogni $t = t_k$ esistono una derivata destra e una derivata sinistra di γ in t $\quad \gamma'(t^+) \quad \gamma'(t^-)$

$\gamma'_+(t) \quad \gamma'_-(t)$

in genere $\gamma'(t^+) \neq \gamma'(t^-)$ (se sono uguali $\Rightarrow$ γ è derivabile in t)

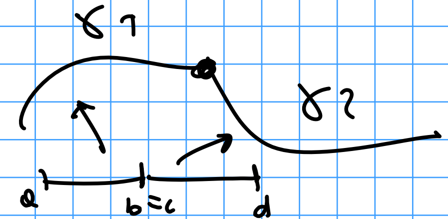
<u>Def.</u> GENERALIZZO LA DEF. DI INTEGRALE

Se γ è C^1 a tratti e $t_0 \dots t_n$ sono come sopra, f continua definita sul sostegno, ALLORA

$$\int_\gamma f \, ds = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt .$$

<u>Def.</u> Supponiamo che $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ siano "CONTIGUE", CIOÈ

$b = c \qquad \gamma_1(b) = \gamma_2(c)$



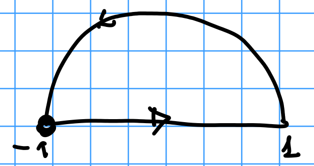
Definisco $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ $(\gamma_1 + \gamma_2)$ la curva $\gamma : [a,d] \to \mathbb{R}^N$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [c,d] \end{cases}$$

PIÙ IN GENERALE Dico che γ_1 e γ_2 sono contigue se $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ (senza chiedere $b=c$)

Posso ancora definire $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ "traslando opportunamente $[c,d]$" (QUESTO HA SENSO perché le riparametrizzazioni non incidono sull'integrale)

Per esempio



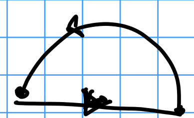
Considero $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $\quad 0 \le t \le \pi$
(il sostegno di γ_1 è la "mezza circonferenza superiore")
$\gamma_2(t) = (t, 0)$ $\quad -1 \le t \le 1$ (γ_2 descrive il segmento di estremi $(-1,0)$ $(1,0)$).

$\gamma_1(\pi) = \gamma_2(-1) = (-1,0)$
HA SENSO $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ ← COME LA PARAMETRIZZO ??
→ Posso "traslare" $[-1,1]$ nell'intervallo $[\pi, \pi+2]$
e riparametrizzo γ_2 nella curva $\tilde{\gamma}_2$ def. da

$$\tilde{\gamma}_2(t) = (t-\pi-1, 0)$$ (se $t=\pi$ $\tilde{\gamma}_2 \to (-1,0)$
$t=\pi+2$ $\tilde{\gamma}_2 \to (1,0)$)

e quindi $\gamma : [0, \pi+2] \to \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\cos(t), \sin(t)) & 0 \le t \le \pi \\ (t-\pi-1, 0) & \pi \le t \le \pi+2 \end{cases}$$



(γ è chiusa $\gamma(0) = \gamma(\pi+2)$) $=(1,0)$

FATTO Se $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ sono contigue, se $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ e f è continua definita sul sostegno di $\gamma = S(\gamma_1) \cup S(\gamma_2)$ ⇒

$$\int_\gamma f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds$$

(su γ_2 posso usare l'intervallo $[c,d]$ originario)

DUNQUE Se voglio calcolare la lunghezza di $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$
CONTIGUE

basta fare $\ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$. NELL'ESEMPIO

$$\ell(\gamma) = \pi + 2$$

$$\gamma_2(t) = (t, 0) \quad -1 \leq t \leq 1$$
$$\gamma_2'(t) = (1, 0)$$

Per vedere che $\ell(\gamma_2) = 2$ applico la def.

$$\ell(\gamma_2) = \int_{-1}^{1} \|\gamma_2'(t)\| \, dt = \int_{-1}^{1} 1 \, dt = 2$$

ESEMPIO (segmento) Se $P, Q \in \mathbb{R}^N$ allora il SEGMENTO da P a Q è la curva

$$\gamma(t) = P + t(Q - P) = tQ + (1-t)P \qquad 0 \leq t \leq 1$$

$(\gamma(0) = P \quad \gamma(1) = Q)$

La lunghezza del segmento è $\int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt =$

$$\int_0^1 \|Q - P\| \, dt = \|P - Q\| \quad (= \|Q - P\|)$$

ESEMPIO $\gamma(t) = (t^2, t^3) \qquad -1 \leq t \leq 1$

γ è C^1 dato che t^2 e t^3 sono derivabili (è C^∞)

COME È FATTO $S =$ sostegno di γ

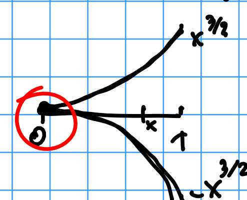
devo cercare $S = \{(x, y) : \; x = t^2 \; y = t^3 \quad \text{con} \quad t \in [-1, 1]\}$

Se $(x, y) \in S \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad |y| = |t^3| = |t^2|^{\frac{3}{2}} = |x|^{3/2}$

INOLTRE SE $x \in [0, 1]$ e $y = x^{3/2}$ o $y = -x^{3/2}$

$\Rightarrow (x, y) \in S$ — basta prendere $t = \pm\sqrt{x} \Rightarrow t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow (t^2, t^3) = (x, y)$



QUESTO CI DICE CHE $S = \{(x, \pm x^{3/2}) \quad x \in [0, 1]\}$

VEDO "A OCCHIO" CHE NON C'È LA RETTA TANG.

NEL PUNTO $(0,0)$

IN EFFETTI γ NON È REGOLARE DATO CHE

$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ si annulla per $t=0$

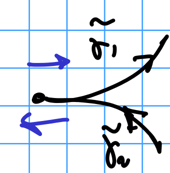
<u>Posso</u> dire che $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ con γ_1 e γ_2 regolari

(PUR DI RIPARAMETRIZZARE γ_1 e γ_2)

Per esempio $\tilde{\gamma}_1(t) = (t, t^{3/2})$ $\quad t \in [0,1]$

$\tilde{\gamma}_2(t) = (-t, -|t|^{3/2})$ $\quad t = [-1,0.]$

$\tilde{\gamma}_i$ è riparametrizzata di γ_i $\quad (i=1,2)$



$\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0)$

$\tilde{\gamma}_1'(0) = (1,0)$

$\neq$

$\tilde{\gamma}_2'(0) = (-1,0)$

γ è "regolare a tratti"

<u>OSS.</u> γ è C^1 a tratti se e solo se

$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_n$

dove γ_i sono curve C^1 e due a due contigue

(analogamente posso definire regolare a tratti)