Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 11 22/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

COMPLETEZZA di uno spazio normato X (con $\|\cdot\|$ norma)

Def. Sia X uno sp. vettoriale, $\|\cdot\|$ una norma.

Data una successione (x_n) in X dico che (x_n) è DI CAUCHY se:

(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n, m \geq \bar{n} \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

In sostanza gli elementi della successione SI AVVICINANO TRA LORO (se gli indici sono grandi)

FATTO Se (x_n) ammette limite ℓ, $\Rightarrow$ (x_n) è una succ. di Cauchy:

INFATTI se $x_n \to \ell$ dato $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} : \|x_n - \ell\| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow$ se $n, m \geq \bar{n}$ $\quad \|x_n - x_m\| = \|(x_n - \ell) + (\ell - x_m)\| \leq$
$\|x_n - \ell\| + \|x_m - \ell\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

IL VICEVERSA PUÒ ESSERE FALSO

Se prendo $X = \mathbb{Q}$ (numeri razionali) so che esiste (q_n) tale che $q_n \geq 0$ $(q_n)^2 \to 2$

Se fossi in $\mathbb{R}$ $q_n \to \sqrt{2}$ ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ quindi q_n non ha limite in $\mathbb{Q}$, MA è di CAUCHY in $\mathbb{Q}$

<u>Def.</u> Dico che X, con la norma $\|\cdot\|$ è <u>COMPLETO</u> se ogni succ. di Cauchy ammette limite

<u>TEOREMA</u> · <u>$\mathbb{R}$ è COMPLETO</u> (con la norma usuale)

Più in generale $\mathbb{R}^N$ è COMPLETO.

<u>Teorema</u> Se X è completo $\Rightarrow$ ogni serie assolutamente convergente è convergente.

<u>Dim.</u> Sia (a_n) una succ. in X. Dire che la serie è ass. conv. vuol dire che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \text{ è convergente}$$

Chiamo $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|$ (so che $\sigma_n \to \sigma = \sum_1^{\infty} \|a_n\| \in \mathbb{R}$)

Chiamo $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ $(\in X)$ (voglio dim. che S_n ha limite in X)

Dimostro che (S_n) è una succ. di Cauchy.

Dati $n \geq m$ interi

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \right\| = \left\| \sum_{m+1}^{n} a_i \right\| \leq$$

$$\sum_{m+1}^{n} \|a_i\| = \left| \sum_{1}^{n} \|a_i\| - \sum_{1}^{m} \|a_i\| \right| = |\sigma_n - \sigma_m|$$

Allora dato $\varepsilon > 0$ posso trovare $\bar{n}$ tale che, se $n, m \geq \bar{n}$

$|\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon$ (so che (σ_n) converge $\Rightarrow$ (σ_n) è di Cauchy)

Dalla disug. sopra deduco che, per $n, m \geq \bar{n}$

$$\| S_n - S_m \| < \varepsilon$$

Ho dim. che (S_n) è di Cauchy $\#$

Per esempio Posso prendere $X = \mathbb{C} = \{ x + iy \}$ e considerare su $\mathbb{C}$ la norma $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

($\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$). Considero $z \in \mathbb{C}$ e faccio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \right)$$

Dico che questa serie converge in $\mathbb{C}$. Il modo più semplice per farlo è mostrare che la serie conv. ass. CIOÈ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| < +\infty$$

OSS. Se a_n sono numeri ≥ 0 ho SEMPRE SENSO la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, eventualmente $+\infty$.
Quindi posso esprimere il fatto che la serie converge scrivendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$ si posso applicare i criteri - per esempio il criterio del rapporto

$$\left(\text{se } a_n > 0, \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \right)$$

$$\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$ TORNA

X spazio vett. con una norma $\| \cdot \|$.

Def. Sia $f : B \to X$ dove $B \subset X$, Dico che f è una **CONTRAZIONE** se esiste α con $0 < \alpha < 1$

tale che $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$

(f è lipschitziana DI COSTANTE $\alpha < 1$)

OSS Se f è una contrazione $\Rightarrow$ f è continua

Teorema (delle contrazioni) Sia X completo.

Se $f : B \to B$ con B chiuso e f è una contrazione

$\Rightarrow$ $\exists$ un punto fisso $\bar{x}$ per f. CIOÈ

$\exists\ \bar{x} \in B$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$

Dim. Prendo un punto x_0 a caso in B. $x_0 \in B$

Costruisco una successione di punti x_n, definiti da x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$ $\dots$ RICORSIVAMENTE

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

DICO CHE (x_n) è una succ. di CAUCHY.

ci arrivo per gradi

(a) Dato $n \in \mathbb{N}$ valutiamo $\|x_{n+1} - x_n\|$

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq \alpha \|x_n - x_{n-1}\|$$

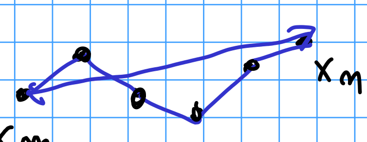
(posso iterare) $\leq \alpha \cdot \alpha \|x_{n-1} - x_{n-2}\| \dots$

$$\leq \alpha^n \|x_1 - x_0\|$$

DUNQUE $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n \|x_1 - x_0\| = \alpha^n \|f(x_0) - x_0\|$

(b) Prendo due indici qualsiasi $n \geq m$

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \|x_{i+1} - x_i\| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \alpha^i \|x_1 - x_0\|$$



$$\leq \|x_1 - x_0\| \sum_{i=m}^{\infty} \alpha^i =$$

$(i = m + j)$

$$= \|x_1 - x_0\| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{m+j} = \|x_1 - x_0\| \alpha^m \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j =$$

$$\|x_1 - x_0\| \frac{\alpha^m}{1-\alpha}$$

(conosco la somma della serie geometrica $\sum_{0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$)

<u>DUNQUE</u> $\|x_n - x_m\| \leq \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-\alpha} \alpha^m$
$n \geq m$

(c) So che $\alpha^m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ DUNQUE, dato $\varepsilon > 0$

$\exists \bar{n}$ tale che se $m \geq \bar{n}$ $\frac{\|x_1 - x_0\|}{1-\alpha} \alpha^m < \varepsilon$

e quindi $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ se $n \geq m \geq \bar{n}$

HO DIM. CHE <u>(x_n) è di CAUCHY</u>

(d) DUNQUE $x_n \to \bar{x}$. $\bar{x} \in B$ perché
B è chiuso.
Se faccio $f(x_n)$ trovo x_{n+1} e $x_{n+1} \to \bar{x}$
(per le proprietà delle succ.) . QUINDI

$f(x_n) \to \bar{x}$ ($x_n \to \bar{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$
se f è continua)

Ma f è continua $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(\bar{x})$

NE DEDUCO $\boxed{f(\bar{x}) = \bar{x}}$ #