Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 10   21/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE

Teorema di Weierstrass Se $f : K \to \mathbb{R}$ continua, $K \subset \mathbb{R}^N$ è chiuso e limitato, allora f ammette massimo e minimo. CIOÈ esistono $\underline{x}, \overline{x} \in K$ tali che $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$.

In questo caso dico che $\underline{x}$ è pto di minimo, $\overline{x}$ è pto di massimo

$$f(\underline{x}) = \min_{x \in K} f(x) \qquad f(\overline{x}) = \max_{x \in K} f(x)$$

Questo teorema è legato a quest'altro:

Teorema di Bolzano - Weierstrass Se (a_n) è una successione in $\mathbb{R}^N$ e se (a_n) è limitata:

$$\exists\, M \text{ tale che } \|a_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora (a_n) ammette una sottosuccessione convergente.

CIOÈ: $\exists\ (k_n)$ successione strett. crescente di interi,

$\exists \ \overline{x} \in \mathbb{R}^N$ tali che $a_{k_m} \xrightarrow{m\to\infty} \overline{x}$.

<u>Idea di dim</u> (dando per buono il caso $N=1$) se $a_n \in \mathbb{R}^N$

$a_n = (a_{1,n}, \dots, a_{N,n})$. Se (a_n) è limitata $\Rightarrow$

ogni $(a_{i,n})$ $i = 1, 2, \dots, N$ è limitata.

Posso estrarre da $(a_{1,n})$ una sottosuccessione convergente a un numero x_1: $\exists \ k_n : a_{1,k_n} \to x_1$

Considero (a_{2,k_n}) (che è estratta da $(a_{2,n})$). Questa è ancora limitata $\Rightarrow$ ammette una sottosuccessione $(a_{h_{k_m}})$ che tende a $x_2 \in \mathbb{R}$. NOTO CHE

$$a_{1, h_{k_n}} \to x_1 \quad (\text{è estratta da } (a_{1,k_n}))$$

VADO AVANTI COSÌ per $(a_{3,n}) \cdot (a_{N,n})$

e alla fine trovo una successione di indici (k_n) tale che

$$a_{1,k_n} \to x_1, \quad a_{2,k_n} \to x_2, \quad \dots, \quad a_{N,k_n} \to x_N$$

CIOÈ $$\underset{\mathbb{R}^N}{\underset{\cap}{a_{k_n}}} \to \underset{\mathbb{R}^N}{\underset{\cap}{\overline{x}}} = (x_1, \dots, x_N)$$

#

<u>Dim di Weierstrass</u> Dimostro l'esistenza del minimo.

So che comunque esiste

$$m = \inf_{x \in K} f(x) = \inf \underbrace{\{ f(x) : x \in K \}}_{\text{è un sottoinsieme} \neq \emptyset \text{ di } \mathbb{R}} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

- So che dato un insieme $\overset{\neq\emptyset}{A} \subset \mathbb{R}$ esiste (a_n) di punti di A tale che $a_n \to \inf A$

• Applico l'ultima proprietà all'insieme $A=\{f(x) \mid x\in K\}$

OTTENGO CHE $\exists\ (x_n)$ di punti di K tali che $f(x_n)\to m$

• Dato che $x_n \in K \Rightarrow (x_n)$ è limitata (K è limitato).
Per Bolzano-Weierstrass $\exists\ (x_{k_n})$ tale che $x_{k_n} \to \underline{x}$ per $\underline{x}\in\mathbb{R}^N$ opportuno. Dato che K è chiuso $\Rightarrow \underline{x}\in K$

IN SOSTANZA $x_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{x} \in K$

• Vediamo $f(x_{k_n})$. Dato che f è continua $\Rightarrow$

$$\boxed{f(x_{k_n}) \to f(\underline{x})}$$

• Per come è stata costruita (x_n) so che $f(x_n)\to m$.
Ma anche $f(x_{k_n}) \to m$ (essendo estratta da $f(x_n)$)

DUNQUE HO DUE COSE

$$f(\underline{x}) \leftarrow f(x_{k_n}) \rightarrow m$$

Per l'unicità del limite $f(\underline{x}) = m$. In particolare $m\in\mathbb{R}$ e essendo l'inf f

$$f(\underline{x}) = m \le f(x) \quad \forall x\in K$$

Teorema (possibile variante di W.)

$f: K\to\mathbb{R}$ f continua, $K\subset\mathbb{R}^N$.
Supponiamo che

(a) se $x_0 \in \partial K\setminus K \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$

(b) NEL CASO in cui K è illimitato chiedo anche

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \qquad (-\infty)$$

OSS. Se A è chiuso (a) è automatico perché $\partial K \setminus K = \emptyset$

Se A è limitato (b) è automatico

TESI f ammette minimo. (massimo)

Idea di dim. Come nella dim. di W. prendo una succ.

$x_n \in K$ tale che $f(x_n) \to m = \inf_{x\in K} f(x)$.

I° (x_n) è limitata: Se K è limitato è ovvio. Se K non è limitato, supponiamo (x_n) non limitata. Posso suppore $\|x_n\| \to \infty$ ("a meno di passare a una sottosucc.")

Per l'ipotesi (b) $\Rightarrow$ $f(x_n) \to +\infty$ $\Rightarrow$ $m = +\infty$

Ma inf A non è mai $+\infty$ – a meno che $A = \emptyset$.

II Passo a una sottosuccessione e posso supporre che $x_n \to \underline{x}$ con $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$. Naturalmente $\underline{x} \in \overline{K}$. Se non fosse $\underline{x} \in K$ $\Rightarrow$ $\underline{x} \in \partial K \setminus K$. Come fatto nel punto I trovo che $f(x_n) \to +\infty$ IMPOSSIBILE

III DUNQUE $\underline{x} \in K$ e come prima trovo $f(\underline{x}) = \inf_K f$

cioè $\underline{x}$ è pto di minimo.

ESEMPI DI UTILIZZO DI QUESTO TEOREMA

$$f(x,y) = 4x^2 + y^4 - 12xy$$

definita su tutto $\mathbb{R}^2$. DICO CHE f ammette minimo.

In questo caso $K = \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $\partial K = \emptyset$. Dunque la (a) è automatica. Mi serve la (b), cioè

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$$

DUNQUE VEDO SE $\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} 4x^2+y^4-12xy = +\infty$

CERCO UNA "MINORAZIONE" del termine $-12xy$

Idea spontanea $|xy| \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} \Rightarrow -12xy \ge -6x^2-6y^2$

VA MALE $\rightarrow$ $f(x,y) \ge -2x^2+y^4-6y^2$ NON VA A $+\infty$

Posso essere più bravo:

$$12xy = (2x)\cdot(6y) \le \frac{4x^2}{2}+\frac{36y^2}{2} = 2x^2+18y^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) \ge 4x^2+y^4-2x^2-18y^2 = \underbrace{2x^2}_{g(x)}+\underbrace{y^4-18y^2}_{h(y)}$$

e noto che sia g che h sono continue e $\lim_{x\to\infty} g(x)=+\infty$

$\lim_{y\to\infty} h(y)=+\infty$

($\Rightarrow$ entrambe sono limitate inferiormente $\to$ per W. generalizzato $h(y)\ge h(\underline{y})$ con $\underline{y}\in\mathbb{R}$ opportuno)

DA QUESTO segue $\lim_{(x,y)\to\infty} g(x)+h(y) = +\infty$

INFATTI se $\|(x_n,y_n)\|\to\infty \Rightarrow$ almeno uno tra $|x_n|$ e $|y_n|$ è illimitato, per esempio $|x_n|$ è illimitato. Allora $\exists\ (x_{k_n})$ con $|x_{k_n}|\to+\infty \Rightarrow g(x_{k_n})\to+\infty$ mentre $h(y_{k_n})\ge h(\underline{y}) \Rightarrow g(x_{k_n})+h(y_{k_n})\to+\infty$

$\Rightarrow f(x_{k_n},y_{k_n})\to+\infty$

Con un po' di tecnica si riesce a ricavare la tesi

FATTO Se $f(x,y) \geq g(x) + h(y)$ dove

g, h continue e $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{|y|\to\infty} h(y) = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$$

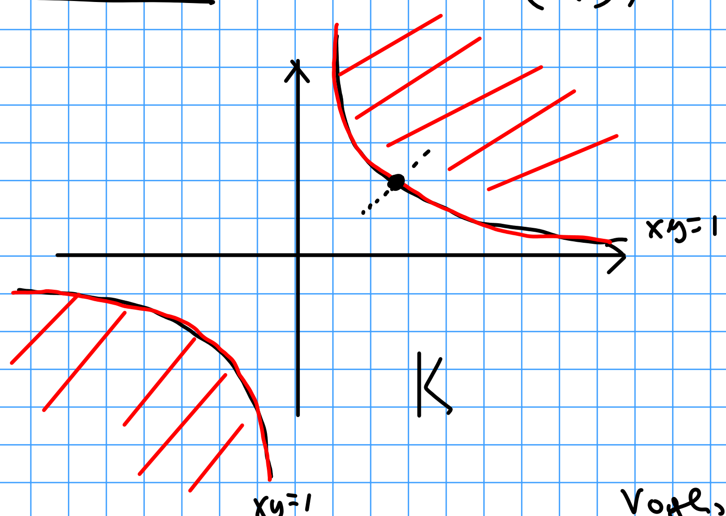
DUNQUE $\lim_{(x,y)\to\infty} \underbrace{4x^2 + y^4 - 12xy}_{f(x,y)} = +\infty$

f è CONTINUA

$\Rightarrow$ f ha minimo

ESEMPIO $f(x,y) = x^2 + y^2 - \ln(1-xy)$

Dominio $K = \{(x,y) : 1-xy > 0\} = \{xy < 1\}$



f è continua su K per motivi ovvi

POSSO DIRE CHE f ha minimo ??

Voglio vedere se valgono (a) e (b) di Weierstrass generalizzato

- $\partial K = \{(x,y) : xy = 1\}$

Lo diamo per buono: è chiaro che $\partial K \subset \{xy = 1\}$

Con un po' di pazienza si vede che ogni punto $(x,y) : xy = 1$ è effettivamente in ∂K

DUNQUE Prendo (x_0, y_0) con $x_0 y_0 = 1$ e calcolo

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0^2 + y_0^2 - \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \ln(1-xy) = +\infty$$

$\to$ VALE (a)

• Vediamo se vale (b)

$$f(x,y) = x^2+y^2 - \ln(1-xy)$$

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow 1-xy \geq 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\ln(1-xy) \geq \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$f(x,y) \leq x^2+y^2 - \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) = \|(x,y)\|^2 - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2\right)$$

NON SERVE – DEVO DIM. L'ALTRA DISUG.

$$|xy| \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow \underline{-xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}}$$

↑

so che $+xy$ e $-xy$ sono $\leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

$$\Downarrow$$

$$-\ln(1-xy) \geq -\ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x,y) \geq \|(x,y)\|^2 - \ln\left(1 + \frac{\|(x,y)\|^2}{2}\right)$$

dato che $\lim_{(x,y)\to\infty} \|(x,y)\| = +\infty \Rightarrow \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$

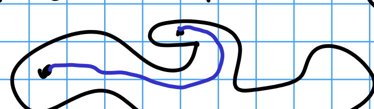
ANCHE LA (b) è verificata $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ HA MINIMO}}$

Teorema degli zeri !!

Mi serve premettere una definizione

Def. $A \subset \mathbb{R}^N$ è CONNESSO PER ARCHI se dati comunque due punti $P, Q \in A$ esiste una curva continua in A: $\gamma: [a,b] \to A$, γ continua t.c. $\gamma(a) = P$ $\gamma(b) = Q$

(γ congiunge P e Q)



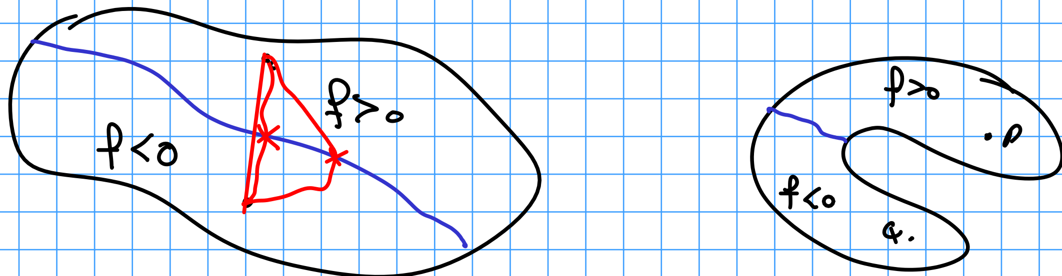
Nel seguito quando dico "CONVESSO" intendo "CONNESSO PER ARCHI"

(c'è un'altra def. più complicata di insieme connesso: per fortuna se A è aperto CONNESSO $\Leftrightarrow$ CONN. PER ARCHI)

<u>Teorema</u> Suppongo $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}^N$ connesso per archi

Suppongo che $x, y \in A$, $f(x) < 0$ $f(y) > 0$.

Allora per ogni curva $\gamma : [a,b] \to A$, continua che congiunge x e y $\exists$ $t \in]a,b[$ tale che $f(\gamma(t)) = 0$



La dim. si riconduce al teorema degli zeri applicato a $f(\gamma(t))$

<u>Continuità dell'inverso ??</u> PROBLEMA DIFFICILE

Vale il seguente risultato (NO DIM.)

<u>Teorema</u> Siano $f : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ A chiuso e limitato

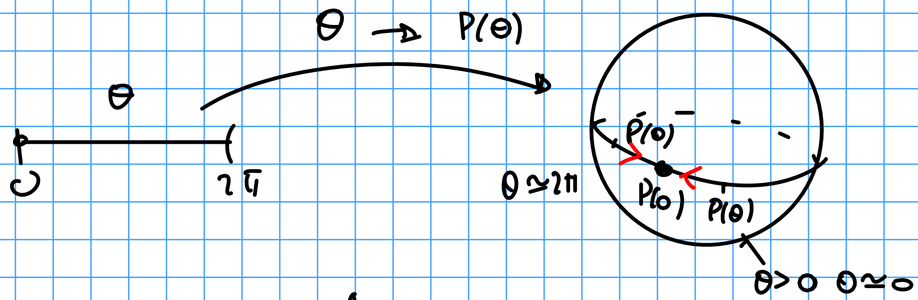
f continua e iniettiva. Pongo $B = f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$

(B è l'immagine di A tramite f). f è bigettiva da A in B e quindi esiste $f^{-1} : B \to A$

<u>TESI</u> f^{-1} è CONTINUA

Questo teorema è interessante ma di solito non abbiamo le ipotesi. TIPICAMENTE A è aperto

Vedremo più avanti delle ipotesi (sulle "derivate") che ci danno la cont. di f^{-1}



P^{-1} NON È CONTINUA IN $P(0)$

se arrivo a $P(0)$ | sull'equatore | da un lato i $\theta \to 0$ dall'altro $\theta \to 2\pi$

Alcuni discorsi sulle serie in uno spazio X con una norma

Ho X spazio vettoriale e $\|\cdot\|$ una norma su X

Data una successione (x_n) di punti di X chiamo "somme parziali" le

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Si dice che la serie di (x_n) è CONVERGENTE oppure che la succ. (x_n) è SOMMABILE se

(S_n) ammette limite S (in X)

CIOÈ $\exists\, S \in X$ tale che $\|S_n - S\| \longrightarrow 0$

INDICO CON $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ questo limite S (SOMMA DELLA SERIE)

Spesso si dice che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è CONVERGENTE

<u>NOTA</u> IN X non si parla di serie divergenti. SOLO serie convergenti o serie non convergenti.

Def. Dico che (x_n) è ASSOLUTAMENTE SOMMABILE o che la serie degli (x_n) è ASS. CONVERGENTE se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \quad \text{converge} \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

Teorema Se $X = \mathbb{R}^N$ allora ogni serie ASS. CONV. è CONVERGENTE