Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

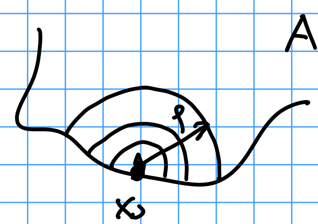
Lezione 9 16/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esempi di limiti

RICORDIAMO CHE se $f : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$
0 di acc. per A, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{\rho \to 0^+} \left(\sup_{\substack{\|x - x_0\| = \rho \\ x \in A}} \|f(x)\| \right) = 0$$



QUESTO SI VEDE FACILMENTE USANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE

Se supponiamo $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la proprietà precedente si può esprimere come segue (in coordinate polari)

$$(\star) \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 \iff \lim_{\rho \to 0^+} \sup_{0 \le \theta \le 2\pi} |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = 0$$

FISSATO $\rho > 0$ faccio il "massimo" di $|f|$ sulla circonferenza di raggio ρ

e poi faccio il limite per $\rho \to 0$ di questo massimo.

Esempio Dimostriamo che $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2+y^4} = 0$.

Se vogliamo usare $(\star)$ dobbiamo trovare

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi} \frac{\rho^5 \cos^3\theta \sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4 \sin^4\theta} = \rho^3 \max_{0\le\theta\le 2\pi} \overbrace{\frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta}}^{\psi_\rho(\theta)}$$

(qui so che il sup è un max perché la funzione è continua e θ varia in un intervallo chiuso e limitato). Derivo ψ_ρ e cerco i θ per cui $\psi'_\rho(\theta) = 0$ (punti stazionari di ψ_ρ) (*)

$$\psi'_\rho(\theta) = \frac{1}{(\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\left(-3\cos^2\theta\sin^3\theta + 2\cos^4\theta\sin\theta\right)\left(\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta\right) +$$

$$- \cos^3\theta\sin^2(\theta)\left(-2\cos\theta\sin\theta + 4\rho^2\sin^3\theta\cos\theta\right)\Big] =$$

$$\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[-3\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\cos^4\theta - 3\rho^2\sin^6\theta + 2\rho^2\cos^2\theta\sin^4\theta +$$

$$+ 2\cos^2\theta\sin^2\theta - 4\rho^2\cos^2\theta\sin^4\theta\Big] =$$

$$\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\cos^2\theta\,(\underbrace{-\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}_{=1-3\sin^2\theta}) - \rho^2\sin^4\theta\,(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)\Big]$$

Se eguaglio a zero trovo

$$\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 0, \quad \cos^2\theta\,(1-3\sin^2\theta) = \rho^2\sin^4\theta\,(2\cos^2-3\sin^2\theta)$$

Le prime due condizioni, se inserite nella ψ_ρ, mi danno $\psi_\rho = 0$ che non può essere il max. Dunque devo considerare

$$(E\rho) \qquad \cos^2\theta\,(1-3\sin^2\theta) = \rho^2\sin^4\theta\,(2\cos^2-3\sin^2\theta)$$

(*) Sto cercando i max di $|\psi_\rho(\theta)|$ — per questo cerco i max e i min di ψ_ρ — se questi hanno valore diverso da zero ne prendo il modulo e scelgo il più grande

So per certo che esiste almeno un θ_ρ che rende vera $(E\rho)$.
(non necessariamente unico). Vediamo cosa fa un tale θ_ρ se $\rho \to 0$. Supponiamo che $\rho_n \to 0$ (una successione di ρ)
Dato che (ρ_n) è limitata in $[0, 2\pi]$ essa ha una sottosuccessione che converge a un $\theta_0 \in [0, 2\pi]$. Da $(E.\rho)$, mandando $\rho \to 0$, ho:

$$(E_0) \quad \cos^2\theta_0 (1 - 3\sin^2\theta_0) = 0$$

Dunque (a) $\theta_0 = \frac{\pi}{2} \,/\, \frac{3\pi}{2}$ OPPURE (b) $\theta_0 = \pm \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \,/\, \pm\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi$

Nel caso (a), tornando a $(E.\rho)$ (SCRIVO ρ INVECE DI ρ_n)

$$\cos^2(\theta_\rho) = \rho^2 \underbrace{\frac{\sin^4\theta_\rho \,(2\cos^2\theta_\rho + 3\sin^2\theta_\rho)}{1 - 3\sin^2\theta_\rho}}_{\substack{\text{questa quantità diventa } <0 \text{ perché} \\ \sin^2\theta_\rho \to 1 \text{ e dunque il denominatore} \\ \text{tende a } -2 \text{ (e il resto è } >0)}}$$

Dunque il caso (a) non è possibile.

Nel caso (b), ho che θ_0 è un angolo con $\cos\theta_0 \neq 0$
e quindi

$$|\psi_\rho(\theta_\rho)| = \left| \frac{\cos^3\theta_\rho \sin^2\theta_\rho}{\cos^2\theta_\rho + \rho^2\sin^4\theta_\rho} \right| \longrightarrow |\cos\theta_0| \sin^2\theta_0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{NON} \\ \text{TENDE A} \\ +\infty\end{array}\right)$$

e quindi $$\lim_{\rho\to 0} \rho^3 |\psi_\rho(\theta_\rho)| = 0 \quad !!$$

<u>OSS.</u> È MOLTO PIÙ SEMPLICE USARE LA DISUGUAGLIANZA

$$\left| \frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta} \right| \leq \left| \frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \right| = |\cos\theta| \sin^2\theta \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{"} \lim_{\rho\to 0} \rho^3 \max_\theta \left| \frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta} \right| \leq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0 \text{"}$$ (nel senso del teorema del confronto)

Altro esempio $\qquad f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^4}$

Come primo

$$\max_{0\le\theta\le2\pi} |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \rho^2 \max_{0\le\theta\le2\pi} \underbrace{\frac{\cos^2\theta\,\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}}_{\psi_\rho(\theta)}$$

$$\psi'_\rho(\theta) = \frac{1}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\left(-2\cos\theta\sin^3\theta + 2\cos^3\theta\sin\theta\right)\left(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta\right) +$$
$$- \cos^2\theta\sin^2\theta\left(-2\cos\theta\sin\theta + 4\rho^2\sin^3\theta\cos\theta\right)\Big] =$$

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\cancel{-2\sin^2\theta\cos^2\theta} + 2\cos^4\theta - 2\rho^2\sin^6\theta + 2\rho^2\sin^4\theta\cos^2\theta +$$
$$+ \cancel{2\cos^2\theta\sin^2\theta} - 4\rho^2\sin^4\theta\cos^2\theta\Big] =$$

$$\frac{\cos\theta\sin\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[2\cos^4\theta - \rho^2\sin^4\theta\Big(\underbrace{2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}_{=2}\Big)\Big]$$

EGUAGLIANDO A ZERO

$\cos\theta = 0 \qquad \sin\theta = 0 \qquad\qquad \cos^4\theta = \rho^2\sin^4\theta$

Le prime due non sono interessanti ($\psi_\rho(\theta_\rho)=0$) ; la terza mi dà :

$\theta_\rho = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \to \frac{\pi}{2}$ (prendiamo $\theta_\rho \in [0, \pi/2]$ - dato che la funzione è simmetrica possiamo ridurci a questo caso)

Dunque $\cos\theta_\rho \to 0$ e $\sin\theta_\rho \to 1$. Mettiamo $\cos^2\theta_\rho = \rho\sin^2\theta_\rho$ nella ψ_ρ $\Longrightarrow$

$$\rho^2\psi_\rho(\theta_\rho) = \rho^2\,\frac{\rho\sin^4\theta_\rho}{\rho\sin^2\theta_\rho + \rho^2\sin^4\theta_\rho} = \rho^2\,\frac{\sin^2\theta_\rho}{\underbrace{1+\rho\sin^2\theta_\rho}_{\downarrow\ 1}} \xrightarrow{\rho\to0} 0$$

DUNQUE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \Rightarrow$

Anche in questo caso una disuguaglianza semplifica molto la discussione:

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le \frac{(x^2+y^4)\,y^2}{x^2+y^4} = y^2 \quad (\to 0 \text{ se } (x,y)\to(0,0))$$

<u>Altro esempio</u> $\qquad f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$

Mostro subito che $\qquad f(x,y)\to 0 \qquad$ INFATTI

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^4}\right| \le \frac{(x^2+y^4)\,|y|}{x^2+y^4} = |y| \quad (\to 0 \text{ se } (x,y)\to(0,0))$$

Vediamo comunque il ragionamento in coordinate polari. STAVOLTA

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi}(\dots) = \rho\,\underbrace{\frac{\cos^2\theta\,\sin\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}}_{\varphi_\rho(\theta)} \qquad \text{Derivo}$$

$$\frac{1}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[(-2\cos\theta\sin^2\theta+\cos^3\theta)(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)+$$
$$-\cos^2\theta\sin\theta\,(-2\cos\theta\sin\theta+4\rho^2\sin^3\theta\cos\theta)\Big]=$$

$$\frac{\cos\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[-2\cancel{\cos^2\theta\sin^2\theta}+\cos^4\theta-2\rho^2\sin^6\theta+\underline{\rho^2\sin^4\theta\cos^2\theta}+$$
$$2\cancel{\cos^2\theta\sin^2\theta}-\underline{4\rho^2\sin^4\theta\cos^2\theta}\Big]=$$

$$\frac{\cos\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\cos^4\theta-\rho^2\sin^4\theta\,(2\sin^2\theta+3\cos^2\theta)\Big]$$

Se eguaglio a zero $\to$ $\cos\theta=0$ (non interessante) e

$$\cos^4\theta=\rho^2\sin^4\theta\,(2\sin^2\theta+3\cos^2\theta)$$

So che esiste $\theta=\theta_\rho$ pto di max che verifica l'equazione. Pongo suppongo (per la simmetria) che $\theta_\rho \in [0, \pi/2]$. Se mando $\rho \to 0$

$\Rightarrow \quad \cos\theta_\rho \to 0 \quad$ e quindi $\quad \theta_\rho \to \pi/2$

Se metto $\cos^2\theta_\rho = \rho \sin^2\theta_\rho \sqrt{2\sin^2\theta_\rho + 3\cos^2\theta_\rho}$ nella $\psi_\rho \Rightarrow$

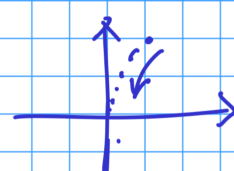
$$f \quad \psi_\rho(\rho_\rho) = \rho \, \frac{\rho \sin^4\theta_\rho \sqrt{2\sin^2\theta_\rho + 3\cos^2\theta_\rho}}{\rho \sin^2\theta_\rho \left(\sqrt{2\sin^2\theta_\rho + 3\cos^2\theta_\rho} + \rho \sin^2\theta_\rho \right)} =$$

$$f \quad \frac{\sin^2\theta_\rho \sqrt{2\sin^2\theta_\rho + 3\cos^2\theta_\rho}}{\underbrace{\sqrt{2\sin^2\theta_\rho + 3\cos^2\theta_\rho} + \rho\sin^2\theta_\rho}_{\downarrow \; \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1}} \xrightarrow{\rho \to 0} 0$$

Dunque ritroviamo che $f(x,y) \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$

Osservazione I calcoli fatti per trovare il $\Vert_\rho$ che rende massima f sulla circonferenza di raggio ρ CI DICONO IN CHE DIREZIONE TENDE A DISPORSI IL PUNTO DI MAX $(\rho\cos\theta_\rho, \rho\sin\theta_\rho)$

– IN QUESTO CASO $\theta = \frac{\pi}{2}$



ANCORA UN ESEMPIO $\quad f(x,y) = \dfrac{x y^2}{x^2 + y^4}$. ABBIAMO

VISTO CHE questa funzione NON HA LIMITE in $(0,0)$

Vediamo in coordinate polari

$$\to \max_{0 \le \theta \le 2\pi} |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \frac{\rho\, |\cos\theta| \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \sin^4\theta} =$$

(per simmetria) $\quad = \rho \max_{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}} \underbrace{\dfrac{\cos\theta \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \rho^2 \sin^4\theta}}_{\psi_\rho(\theta)}$

Derivo ψ_ρ :

$$\psi'_\rho(\theta) = \frac{1}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\left(-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta\sin\theta\right)\left(\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right) +$$

$$- \cos\theta\sin^2\theta\left(-2\sin\theta\cos\theta + 4\rho^2\sin^3\theta\cos\theta\right)\Big] =$$

$$\frac{\sin\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[-\sin^2\theta\cos^2\theta + 2\cos^4\theta - \rho^2\sin^6\theta + 2\rho^2\sin^4\theta\cos^2\theta +$$

$$+ 2\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\rho^2\sin^4\theta\cos^2\theta\Big] =$$

$$\frac{\sin\theta}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}\Big[\cos^2\theta\,\cancel{\left(\sin^2\theta+2\cos^2\theta\right)} - \rho^2\sin^4\theta\,\cancel{\left(\sin^2\theta+2\cos^2\theta\right)}\Big]$$

Eguaglio a zero → $\sin\theta = 0$ (non interessante) e

$$\cos^2\theta = \rho^2\sin^4\theta \qquad \leftarrow \text{HA SOL. } \theta = \theta_\rho$$

Se $\rho \to 0 \Rightarrow \cos^2\theta_\rho \to 0$ dunque $\theta_\rho \to \pi/2$

Metto $\theta = \theta_\rho$ in $\psi_\rho \Rightarrow$

$$\max_{\|(x,y)\|=\rho} |f(x,y)| = \rho\,\psi_\rho(\theta_\rho) = \rho\,\frac{\rho\sin^2\theta_\rho\sin^2\theta_\rho}{\rho^2\sin^4\theta_\rho+\rho^2\sin^2\theta_\rho} = \frac{1}{2}$$

DUNQUE $f(x,y)$ NON TENDE A ZERO

(poi si vede che sugli assi f vale zero $\Rightarrow f$ NON HA LIMITE)