Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 08 15/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Oss. Dire che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ è LO STESSO che

$$\lim_{x \to x_0} \|f(x)\| = +\infty$$

(quindi, per esempio, $\lim_{x \to +\infty} x^3 = \infty$)

Analogamente posso scrivere

$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$ invece di $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$

Altri esempi di limiti

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \begin{pmatrix} x+3 \\ 3x-y \end{pmatrix} = \;!\,!$$

Se mi metto su una retta (tv_x, tv_y) con $t \to \infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \begin{pmatrix} tv_x + 3 \\ 3tv_x - tv_y \end{pmatrix}$$

entrambe le componenti divergono ($a + o - \infty$)
(a parte il caso $3v_x = v_y$ per cui la II° comp. $\to 0$)

MI CHIEDO SE $\lim_{(x,y)\to\infty} \begin{pmatrix} x+3 \\ 3x-y \end{pmatrix} = \infty$

cioè $\lim_{(x,y)\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ 3x-y \end{pmatrix} \right\| = +\infty \iff$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} x+3 \\ 3x-y \end{pmatrix} \right\|^2 = +\infty \iff$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} (x+3)^2 + (3x-y)^2 = +\infty \iff$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} x^2 + 6x + 9 + 9x^2 - 6xy + y^2 = +\infty \iff$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \underbrace{10x^2 + y^2 - 6xy + 6x + 9}_{\text{cerco di far comparire } \|(x,y)\| \text{ - con una disuguagl.}} = +\infty$$

Il termine "brutto" è $-6xy$ che può andare a $-\infty$ ed è di ordine 2. VEDO se riesco a stimarlo in termini di $c\|(x,y)\|^2$ con c opportuno.

PRIMO TENTATIVO

$$xy \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow -xy \ge -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

$$-6xy \ge -3x^2 - 3y^2$$

$$\Rightarrow \|f(x,y)\|^2 \ge 7x^2 - \underset{4}{2}y^2 + 6x + 9$$

VA MALE - LA DIS. NON MI SERVE

SECONDO TENTATIVO $xy = (ax)\left(\frac{y}{a}\right)$ a da trovare

$$xy \le \frac{a^2x^2}{2} + \frac{1}{2a^2}y^2$$

$$-6xy \ge -3a^2x^2 - \frac{3}{a^2}y^2$$

?? POSSO SCEGLIERE a IN MODO CHE $3a^2 < 10$ $\frac{3}{a^2} < 1$

$$3 < a^2 < \frac{10}{3}$$

SI PUÒ FARE SE $3 < \frac{10}{3}$

Dato che $3 < \frac{10}{3}$ $(9 < 10)$ trovo questa $a \Rightarrow$

$\left(a^2 = \frac{19}{6} \quad a = \sqrt{\frac{19}{6}} \; \dots \right)$

$$\|f(x,y)\|^2 \geq \underbrace{\left(10 - 3a^2\right)}_{\geq\, \varepsilon > 0} x^2 + \underbrace{\left(1 - \frac{3}{a^2}\right)}_{\geq\, \varepsilon > 0} y^2 - 6|x| + 9$$

Il termine $|x|$ si stima: $\quad 6|x| = 6\sqrt{x^2} \leq 6\sqrt{x^2+y^2}$

$$-6|x| \geq -6\|(x,y)\| \quad \Rightarrow$$

$$f(x,y) \geq \varepsilon \|(x,y)\|^2 - 6\|(x,y)\| + 9 \qquad \text{per } \varepsilon > 0 \text{ opportuno}$$

$\downarrow$

da questo ottengo che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \infty$

$$\overset{\shortparallel}{\lim_{\|(x,y)\|\to\infty}} f(x,y)$$

Perché $\varepsilon\rho^2 - 6\rho + 9 \to +\infty$ se $\rho \to \infty$ $\quad /\!/$

<u>Altro modo di affrontare il problema</u>

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} 10x^2 + y^2 - 6xy + 6x + 9 = +\infty$$

"PASSAGGIO IN COORDINATE POLARI" (SIAMO IN $\mathbb{R}^2$!)

$x = \rho\cos\theta \qquad\qquad \rho = \|(x,y)\|$
$y = \rho\sin\theta$

IN TERMINI DI (ρ,θ) la funzione $\|f(x,y)\|^2$ diventa

$$\tilde{f}(\rho,\theta) = 10\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta - 6\rho^2\cos\theta\sin\theta + 6\rho\cos\theta + 9$$

DIRE CHE $\|f(x,y)\|^2 \to +\infty$ <u>EQUIVALE A DIRE</u>

$$\lim_{\rho\to+\infty} \boxed{\inf_{\theta\in[0,2\pi]}} \tilde{f}(\rho,\theta) = +\infty$$

Fisso $\rho > 0$ e cerco il minimo di $\tilde{f}(\rho,\theta)$ al variare di θ (ho $0 \div 2\pi$). Derivo $\tilde{f}(\rho,\theta)$ rispetto a θ

$$\to \quad 10\rho^2\, 2\cos\theta(-\sin\theta) + \rho^2\, 2\cos\theta\sin\theta - 6\rho^2(-\sin^2\theta)$$
$$-6\rho^2\cos^2\theta \quad - 6\rho\sin\theta$$

eguaglio a zero

se non ci fosse questo termine potrei fare i conti

$$-18\rho^2\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin(2\theta)} + 6\rho^2\underbrace{(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}_{\cos(2\theta)} - 6\rho\sin\theta = 0$$

COMPLICATA DA RISOLVERE. IN LINEA DI PRINCIPIO DOVREI TROVARE $\theta = \theta_\rho$ per cui l'espressione è minima e poi fare $\lim_{\rho\to\infty} \tilde{f}(\rho,\theta_\rho)$ e vedere se trovo $+\infty$

ANALOGAMENTE Dire che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

EQUIVALE A DIRE, IN COORDINATE POLARI, CHE

$$\lim_{\rho\to 0} \sup_\theta |\tilde{f}(\rho,\theta)| = 0$$

dove $\tilde{f}(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

ESEMPIO $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^4} = 0$

I° MODO (con delle disuguaglianze) Noto che

$$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^4} = (x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}$$
$$|y| = \sqrt[4]{y^4} \le \sqrt[4]{x^2+y^4} = (x^2+y^4)^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow$$

$$|x^3y^2| \le (x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}(x^2+y^4)^{\frac{2}{4}} =$$

$$(x^2+y^4)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = (x^2+y^4)^2$$

DUNQUE

$$\left|\frac{x^3y^2}{x^2+y^4}\right| \le \frac{(x^2+y^4)^2}{x^2+y^4} = x^2+y^4$$

So che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^4) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\right)^2 + \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\right)^4 = 0$

$\Rightarrow$ per il confronto $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

<u>2° tentativo</u> Passo in coordinate polari

$$\tilde{f}(x,y) = \frac{\rho^3\cos^3\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta} = \rho^3\frac{\cos^3\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}$$

Dovrei trovare $\circledast \to \max_\theta \rho^3\frac{\cos^3\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta} =: M(\rho)$

e poi vedere che $\lim_{\rho\to0} M(\rho)=0$

VEDIAMO se VALUTIAMO $\circledast$. Derivo in θ

$$\rho^3\,\frac{\left(3\cos^2\theta(-\sin^4\theta)+2\cos^4\theta\sin\theta\right)(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)+\ldots}{(\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta)^2}$$

$$+\cos^3\theta\sin^2\theta\left(-2\cos\theta\sin\theta+\rho^2 4\sin^3\theta\cos\theta\right)$$

Se eguaglio a zero $\Rightarrow$ (NUMERATORE $=0$)

VEDIAMO DI CONCLUDERE DOMANI