Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

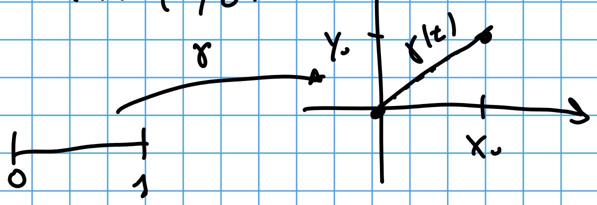
Lezione 07 14/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Prop. La composizione di due funzioni continue è continua:
$f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}^K$ $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$ $x_0 \in A$
$B \ni y_0 =: f(x)$, se f è continua in x_0, g continua in y_0 $\Rightarrow$ $h := g \circ f$ $\left(h(x) = g(f(x)) \right)$ è continua in x_0

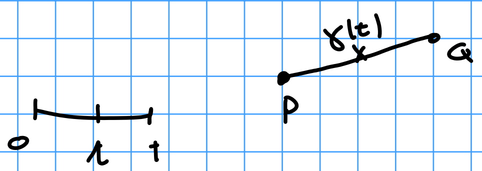
Def. Se $A \subset \mathbb{R}^N$ chiamo "curva in A" una funzione
$\gamma: I \to A$ dove $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo
(per esempio $I = [0, b]$, ma anche $I =]-\infty, a]$, o $I = \mathbb{R}$)
DI SOLITO SI CONSIDERANO CURVE CONTINUE

Per esempio • $\gamma(t) = (t x_0, t y_0)$ $t \in [0,1]$
è una curva continua che "descrive" il segmento tra $(0,0)$ e (X_0, Y_0)



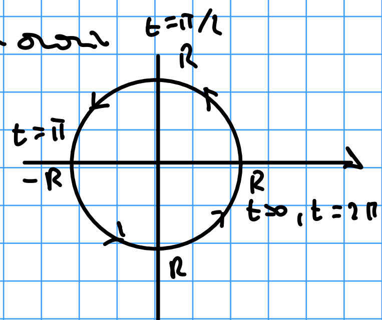
Più in generale se P e Q sono in $\mathbb{R}^N$, la curva

$\gamma(t) = tQ + (1-t)P = P + t(Q-P)$ descrive il segmento che parte da P $(t=0)$ e arriva in Q $(t=1)$



• <u>Altro esempio</u> $\quad \gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$\Rightarrow$ la γ è una curva in $\mathbb{R}^2$, γ descrive la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio R. Questa curva parte da $(R,0)$ e arriva (di nuovo) in $(R,0)$. Inoltre $\gamma(t)$ "gira" in senso antiorario



<u>Conseguenza</u> $\quad$ Se $f: A \to \mathbb{R}^M \quad A \subset \mathbb{R}^N \quad x_0 \in A$, x_0 INTERNO

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}^M) \Rightarrow$

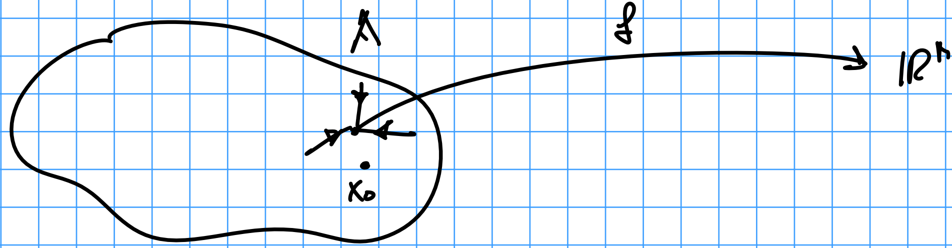
per ogni curva $\gamma: [0,b] \to A$ tale che γ continua e $\gamma(0) = x_0 \Rightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} f(\gamma(t)) = \ell}$

(segue - con un minimo di dimostrazione - dalla composizione di funzioni continue. Per la dim. si usa
$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$
che è continua in x_0)

<u>IN PARTICOLARE (limiti sulle rette)</u>

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} f(\underbrace{x_0 + t\vec{v}}) = \ell \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^N$

è una curva continua che descrive il segmento da x_0 a $x_0 + \vec{v}$



DUNQUE SE f HA LIMITE ℓ $\Rightarrow$
"f HA limite ℓ su ogni retta"

NON VALE $\Leftarrow$

<u>Controesempio</u> $f(x,y) = \dfrac{x y^2}{x^2+y^4}$ (definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

- f è continua fuori da $(0,0)$ - mi chiedo se f ha limite quando $(x,y) \to (0,0)$

- Provo con i limiti sulle rette (che partono da $(0,0)$) - cioè considero un vettore generico $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ e faccio

$$f((0,0)+t\vec{v}) = f(t v_x, t v_y) = \frac{t v_x (t v_y)^2}{(t v_x)^2 + (t v_y)^4} =$$

$$\frac{t^3 v_x v_y^2}{t^2(v_x^2 + t^2 v_y^4)}$$ $\leftarrow$ faccio il limite per $t \to 0^+$

Se $v_y \neq 0$ $v_x \neq 0$ ho $\dfrac{t v_x v_y^2}{v_x^2 + t^2 v_y^4} \to \dfrac{0}{v_x^2} = 0$

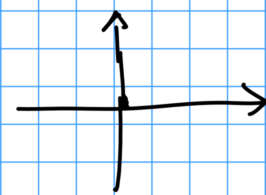
Se $v_x = 0$ oppure $v_y = 0$ (ma non tutti due) $\underset{(t \neq 0)}{\Rightarrow}$ $f(t v_x, t v_y) = \dfrac{0}{v_x^2 + t^2 v_y^4} = 0$

dunque il limite è ancora 0

QUINDI SU OGNI RETTA USCENTE DA $(0,0)$ la funzione tende a zero. PERÒ VEDIAMO CHE f <u>NON</u> HA LIMITE per $(x,y) \to (0,0)$.

Per fare vedere che non ha limite trovo una curva $\gamma(t)$ (che non sarà una retta) su cui $f(\gamma(t)) \cancel{\to 0}$

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$



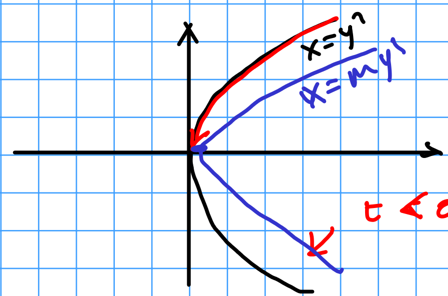
prendo $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \in [0,1]$. Chiaramente $\gamma(t)$ è continua e $\gamma(0) = (0,0)$

Calcolo $f(\gamma(t))$

$$f(\gamma(t)) = f(t^2, t) = \frac{t^2 t^2}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$$

Dunque $\lim_{t \to 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2} \neq 0$ **f NON HA LIMITE**

Per curiosità come è fatta la curva $\gamma(t) = (t^2, t)$ (COSA DESCRIVE?) Se $x = t^2$ $y = t$ $\Leftrightarrow$ $x = y^2$



Analogamente se considero $\gamma(t) = (m t^2, t)$

$\Downarrow$

$$f(\gamma(t)) = \frac{m t^4}{(m^2+1) t^4} = \frac{m}{1+m^2}$$ (dipende da m)

HO TANTI MOTIVI PER CONCLUDERE CHE f NON HA limite in $(0,0)$

- IL LIMITE SULLE RETTE PUÒ SERVIRE
  - (1) per vedere che NON ESISTE il limite (nel caso che dipende dalla retta
  - (2) per individuare il limite - quando il limite sulle rette NON dipende dalla retta

POI PERÒ DEVO FARE QUALCOSA ALTRO

IL LIMITE SULLE RETTE DA SOLO NON BASTA

LIMITI ALL'INFINITO / LIMITI INFINITI

Conviene fare le seguenti DEFINIZIONI. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$

(1) Dico che A è LIMITATO se esiste $R>0$ tale che $A \subset B(0,R)$. IN CASO CONTRARIO dico che A è ILLIMITATO. È chiaro che

$$A \text{ è illimitato} \iff \forall R>0 \ \exists x \in A : \|x\| > R$$

CONVENZIONE (1) Se A è illimitato dico che ∞ è di accumulazione per A. Definisco

$$B(\infty, R) = \{ x \in A : \|x\| > R \}$$

$$\left(A \cap B(\infty, R) \neq \emptyset \ \forall R \iff \infty \text{ è di occ. per } A \right)$$

CONVENZIONE 2 — CASO $N=1$ cioè $A \subset \mathbb{R}$

Dico che A è limitato superiormente (inferiormente) se esiste R : $A \subset]-\infty, R[$ $\left(A \subset]-R, +\infty[\right)$

Se questo non avviene dico che A è ILLIMITATO SUP (INF)

$$A \text{ è illimitato sup. (inf)} \iff \forall R \ \exists x \in A : x > R \ (x < -R)$$

Se A è illimitato sup. (inf) dico che $+\infty$ $(-\infty)$ è di accumulazione per A

Chiaro $B(+\infty, R) = A \cap]R, +\infty[$ / $B(-\infty, R) = A \cap]-\infty, -R[$

Def. generale di limite (comprendente anche i casi infiniti)

$f : A \to \mathbb{R}^M$ $\quad x_0$ di occ. per A $\quad \ell \in \mathbb{R}^M \cup \{\infty\}$

dico che $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se per ogni $\varepsilon > 0$

$$\exists \rho > 0 : \quad f\left(B(x_0, \rho) \cap A \setminus \{x_0\} \right) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

(cioè tutti i punti $x \in B(x_0, \rho)$, $x \in A$, $x \neq x_0$ hanno la proprietà $f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$)

in questo caso $M = 1$ → posso considerare $+\infty$ e $-\infty$ come

Per esempio $\underbrace{\lim_{(x,y) \to \infty} x^2 + y^4 = +\infty}$
VERIFICA

Per la verifica devo dimostrare che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \rho > 0$ tale che $\|(x, y)\| \geq \rho \Rightarrow x^2 + y^4 \geq \varepsilon$. Lo vedo (stavolta ε e ρ sono "grandi")

usando la disuguaglianza $y^2 = y^2 \cdot 1 \leq \frac{(y^2)^2 + 1^2}{2} = \frac{y^4 + 1}{2}$

$\Longleftrightarrow \quad y^4 \geq 2y^2 - 1 \geq y^2 - 1$

DUNQUE $\quad x^2 + y^4 \geq x^2 + y^2 - 1 = \|(x, y)\|^2 - 1 \leftarrow$

Ne segue che, dato ε basta prendere $R > \sqrt{\varepsilon + 1} \Rightarrow$

$\|(x,y)\| > R \Rightarrow \|(x, y)\|^2 > R^2 \Rightarrow x^2 + y^4 \geq R^2 - 1 > \underbrace{(\sqrt{\varepsilon - 1})^2 + 1}_{= \varepsilon}$

DI FATTO HO TROVATO

$$f(x, y) \geq \|(x, y)\|^2 - 1$$

ed è chiaro (come vediamo subito) che $\lim_{x \to \infty} \|x\| = +\infty$

IN EFFETTI VALGONO I "SOLITI" RISULTATI SUI LIMITI INFINITI

<u>PROPRIETÀ</u> Supponiamo $g, f : A \to \mathbb{R}$ $(M = 1)$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ x_0 di acc. per A

(1) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ e g è limitata inferiormente (superiormente)

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = +\infty \qquad (-\infty)$$

(2) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\inf_{x\in A\setminus\{x_0\}} g(x) > 0$ $\left(\sup_{x\in A\setminus\{x_0\}} g(x) < 0\right)$

Basterebbe un intorno di x_0

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = +\infty$ $\quad (-\infty)$

Analogo risultato se $f \to -\infty$ (scambiando i segni)

(3) Se $f: A \to \mathbb{R}^M$ e $g: A \to \mathbb{R}$ e se

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e $\inf_{x\in A\setminus\{x_0\}} |g(x)| > 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) f(x) = \infty$

scalare vettore

(4) Se $f: A \to \mathbb{R}$ e se $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ (ha senso perché $f(x)\neq 0$ se x è vicino a x_0)

(5) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e $f(x)\neq 0 \;\; \forall x \neq x_0 \Rightarrow$

$\lim_{x\to x_0} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$

Si può "raffinare" la cosa:

Se $f(x) \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to 0^+$ (tende a zero e ha valori >0)

Se $f(x) \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to +\infty$ / $-\infty$
$ \to 0^-$

$f \to 0$ e $f(x) > 0$ vicino a x_0

CONVENZIONE Spesso scrivo $f(x) \to \ell$ per indicare

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ (SOTTINTENDENDO x_0 NOTO)

OPPURE $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l$

OVVIAMENTE CONTINUANO A ESSERCI LE "FORME INDETERMINATE"

(casi in cui non si può determinare il limite CON UN TEOREMA GENERALE → bisogno ragionare caso per caso)

Def. (SUCCESSIONI) CHIAMO <u>SUCCESSIONE</u> di punti di $\mathbb{R}^N$ una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^N$, cioè una funzione definita sugli interi $a(1)$ $a(2)$ $a(3)$ ... $a(n)$ ..

<u>CONVENZIONE</u>: I valori della successione (i TERMINI) si indicano $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ (invece di $a(1)$ ..) e la succ. si indica (a_n) o $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

<u>IN REALTÀ</u> si considerano successioni anche delle $(a_n)_{n \geq n_0}$ tipo $a_n = \frac{n+1}{n-3}$ che è definita se $n \neq 3$ / $n \geq 4$

(mi basta che a_n sia definita da un certo n_0 in poi)

PER LE SUCCESSIONI HA SENSO $\lim_{n \to +\infty} a_n$ $\left(\in \mathbb{R}^N \cup \{\infty\} \text{ o } \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ se } N=1 \right)$

<u>OSS.</u> • $a_n \xrightarrow{(n \to +\infty)} l \in \mathbb{R}^N \iff$

$a_{k,n} \to l_k \quad k = 1 .. N$ dove $a_{k,n}$ è la componente k-esima di a_n (l_k di l)

(CI SI RICONDUCE AL CASO REALE)

• $a_n \to \infty \iff \|a_n\| \to +\infty \Leftarrow \exists k : |a_{k,n}| \to \infty$

(per l'ultima implicazione basta notare che $\|a_n\| \geq |a_{k,n}|$)

INOLTRE se $\|a_n\| \to \infty$ $\exists k : |a_{k,n}|$ è illimitato

(se ogni componente fosse limitata $\Rightarrow$ la norma sarebbe limitata)

<u>Per esempio</u> $a_n = n\left(\left(1-(-1)^n\right), \left(1+(-1)^n\right)\right)$

$1-(-1)^n$: 0 PARI, 2 DISPARI; $1+(-1)^n$: 0 DISPARI, 2 PARI

$a_1 = (2, 0)$ $a_2 = (0, 4)$ $a_3 = (6, 0)$

$a_4 = (0, 8)$ $a_5 = (10, 0)$ $a_6 = (0, 12)$ ...

Entrambe le componenti sono illimitate ma nessuna delle due diverge (sono nulle per infiniti n).

Però $\|a_n\| = n\left\|\left((1-(-1)^n), 1+(-1)^n\right)\right\| = n\sqrt{(1-(-1)^n)^2+(1+(-1)^n)^2}$

$= 2n \longrightarrow \infty$

QUINDI $a_n \longrightarrow \infty$

<u>PROP.</u> $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Allora

(1) x_0 è di accumulazione per A $\Longleftrightarrow$

esiste una successione (a_n) di punti di A, con $a_n \neq x_0$

e $a_n \to x_0$ $(n \to +\infty)$

(2) A è chiuso $\Longleftrightarrow$ Per ogni successione (a_n)

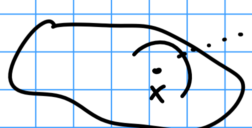
di punti di A, che abbia limite $\ell \Rightarrow \ell \in A$

$\Leftrightarrow$ A è chiuso se e solo se A contiene tutti i possibili limiti di successioni di suoi punti

(3) A è aperto $\Longleftrightarrow$ per ogni successione (a_n) in $\mathbb{R}^N$

che tende a un limite $\ell \in A$, NECESSARIAMENTE

$a_n \in A$ per n grande $(\exists\, \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ \ a_n \in A)$



TEOREMA (limiti e successioni)

Sia $f: A \to \mathbb{R}^M$ $\quad x_0$ pto di acc. per A $\quad \ell \in \mathbb{R}^M$

SONO EQUIVALENTI

(a) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(b) Per ogni successione (a_n) di punti di $A \setminus \{x_0\}$ tale che $\underset{\mathbb{R}^N}{a_n} \to x_0$ SI HA $\underset{\mathbb{R}^M}{f(a_n)} \to \ell$ $\quad (n \to \infty)$

(NO DIM)

(LO POSSO UTILIZZARE IN DUE SENSI

(1) TROVO SUCC. DIVERSE CON limiti DIVERSI $\Rightarrow \nexists$ limite

(2) RIESCO A STIMARE IL comportamento di $f(a_n)$ SU OGNI a_n $\to$ TROVO CHE $\exists$ limite

<u>Per esempio</u> Voglio dim. di nuovo che

$$\lim_{(x,y) \to \infty} x^2 + y^4 = +\infty$$

Posso "ragionare per successioni". Prendo $a_n = (x_n, y_n)$ tale che $a_n \to \infty$ $\left(\Leftrightarrow x_n^2 + y_n^2 \to +\infty\right)$. NE DEDUCO (?) che $x_n^2 + y_n^4 \to \infty$. COME PRIMA OSSERVO CHE

$$x^2 + y^4 \geq x^2 + y^2 - 1 \quad \Rightarrow$$

$$x_n^2 + y_n^4 \geq x_n^2 + y_n^2 - 1 \to +\infty \quad \text{per ipotesi}$$

(qualunque sia (x_n, y_n) purché $x_n^2 + y_n^2 \to +\infty$)

<u>ALTRO ESEMPIO RIVISTO</u> $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

Voglio dim. che $f(x,y) \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$

Prendo (x_n, y_n) tali che $(x_n, y_n) \to (0,0)$ e $(x_n, y_n) \neq (0,0)$

$\overset{(*)}{\iff}$ $x_n^2 + y_n^2 \to 0$ (e $x_n^2 + y_n^2 \neq 0$) e mostro che

$f(x_n, y_n) \to 0$. Per questo vedo che

(Uso disuguaglianza $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$)

$$|f(x_n,y_n)| = \left| \frac{x_n^2 y_n}{x_n^2 + y_n^2} \right| \le \left| \frac{x_n (x_n^2 + y_n^2)/2}{x_n^2 + y_n^2} \right| = \frac{|x_n|}{2} \le \frac{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}{2}$$

(so che $|x_n| \le x_n^2 + y_m^2 \to 0$) $\Rightarrow$ TUTTO TORNA

(*) OSS. $f(x) \to 0 \iff \|f(x)\| \to 0$ (a guardare la definizione)