Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

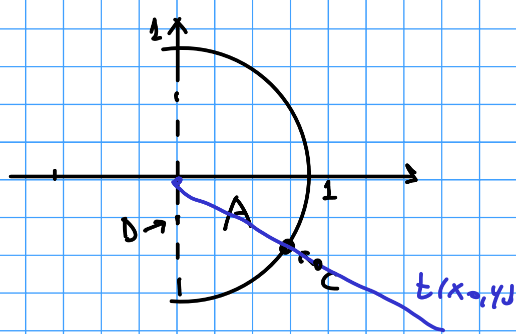
Lezione 06   09/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esempio   Consideriamo

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le 1 , \quad x > 0 \}$$

Mi chiedo chi sono $\mathring{A}$, $\bar{A}$, ∂A.



Cerchiamo prima ∂A. Dovrebbe essere

$$\underbrace{\{ x^2+y^2 = 1, \ x \ge 0 \}}_{C} \cup \underbrace{\{ x = 0, \ -1 \le y \le 1 \}}_{D}$$

Vediamo se lo dimostro

Bisogno far vedere che (1) $\partial A \subset C \cup D$

(2) $C \cup D \subset \partial A$

$\boxed{\text{Le 2}}$ Vedo che $C \subset \partial A$. Prendo un punto $(x_0, y_0) \in C$ e vedo che in ogni suo intorno $B((x_0,y_0), r)$ c'è $(x', y') \in A$ e c'è $(x'', y'') \notin A$. Per questo posso prendere $t > 0$ e considero (tx_0, tx_0). Allora

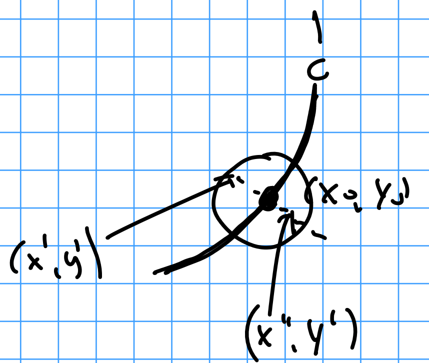
$(t x_0, t y_0) \in A$ se $0 < t \leq 1$. IN PARTICOLARE con $t = 1$ vedo che $(x_0, y_0) \in A$, $(x_0, y_0) \in C$. Ho TROVATO (x', y') (x_0, y_0)

Per trovare (x'', y'') prendo $t > 1$ (in questo modo esco da A!)

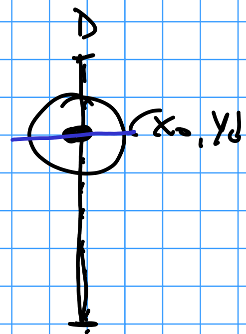
Se $1 < t < 1 + r \Rightarrow \|(x_0, y_0) - (t x_0, t y_0)\| =$

$\|(1-t)(x_0, y_0)\| = |1-t| \underbrace{\|(x_0, y_0)\|}_{=1} = t - 1 < r$ per cui

questo punto $t(x_0, y_0) \notin A$, $t(x_0, y_0) \in B((x_0, y_0), r)$



$\boxed{C \subset \partial A}$



Per vedere che $D \subset \partial A$ faccio in modo simile:

Posto che $(x_0, y_0) \in D$ cioè $x_0 = 0$ $-1 \leq y_0 \leq 1$.

Fisso un raggio $r > 0$

Se considero $(x'', y'') = (x_0, y_0) \leftarrow$ NON APPARTIENE AD A

Poi prendo $(x', y') = (t, y')$ t vicino a zero

Se $t > 0$, $t < r \Rightarrow (x', y') \in A$, $(x', y') \in B((x_0, y_0), r)$

$\boxed{D \subset \partial A}$

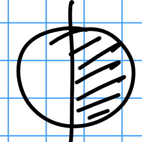
1 $\partial A \subset C \cup D$ $\leftarrow$ ENTRA IN GIOCO UN RISULTATO GENERALE

$C = \{x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ $D = \{x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$

A lo posso vedere come intersezione tra $D(0,1) = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$

e il semipiano $\Pi = \{x > 0\}$ $\overline{\Pi} = \{x \geq 0\}$

$\partial D(0,1) = \{x^2 + y^2 = 1\}$ (visto) $\partial \Pi = \{x = 0\} \leftarrow$ (ci crediamo)



ALLORA $\partial D(0,1) \cap \overline{\Pi} = \{x^2+y^2=1\} \cap \{x \geq 0\}$ ← è l'insieme C !
$\partial \Pi \cap D(0,1) = \{x=0,\ x^2+y^2 \leq 1\} = \{x=0\ -1 \leq y \leq 1\}$ ← è D !

Proposizione Dati due insiemi A e B si ha:

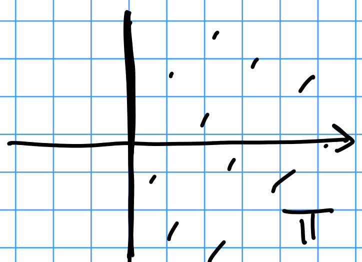
(Δ) $$\partial(A \cap B) \subset (\partial A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \partial B)$$ ←

Se A e B sono chiusi vale di più:

$(\Delta\Delta)$ $$\partial(A \cap B) = (\partial A \cap B) \cup (A \cap \partial B)$$

Rimane da vedere che $\partial\{x>0\} = \{x=0\}$ $\overline{\{x>0\}} = \{x \geq 0\}$

è aperto perché la funzione $\varphi(x,y)=x$ è continua (vedi lezione scorsa)



Uso dei risultati generali

Prop. Supponiamo di avere $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. Abbiamo visto che

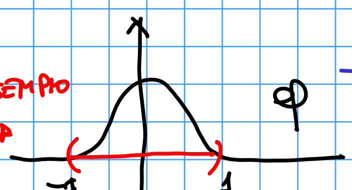
$B = \{P : \varphi(P) < 0\}$ è aperto
$D = \{P : \varphi(P) \leq 0\}$
$E = \{P : \varphi(P) = 0\}$ SONO CHIUSI

Mi chiedo se $\overline{B} = D$ o $\overset{\circ}{D} = B$ o se $E = \partial B = \partial D$

IN GENERALE SONO FALSE

$\Rightarrow$
(1) $\overline{B} \subset D$ (può essere diverso)
(2) $\overset{\circ}{D} \supset B$ (può essere diverso)
(3) $\partial B \subset E$ $\partial D \subset E$

CONTROESEMPIO



$\{\varphi > 0\} =]-1,1[$
$\overline{\{\varphi > 0\}} = [-1,1]$
$\{\varphi \geq 0\} = \mathbb{R}$

(non lo dimostro)

(posso scambiare $\varphi > 0$ con $\varphi < 0$)

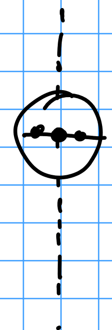
Usiamo queste formule per dimostrare che ① $\overline{\{x>0\}} = \{x \geq 0\}$ e ② $\partial\{x>0\} = \{x=0\}$

Le formule sopra mi danno un pezzo della dimostrazione

$$\overline{\{x>0\}} \subset \{x \geq 0\}$$
$$\partial\{x>0\} \subset \{x=0\}$$

Mi mancano le inclusioni opposte:

Se $x \geq 0 \Rightarrow x \in \overline{\{x>0\}}$. Se $x>0$ è ovvio perché $x \in \{x>0\} \subset \overline{\{x>0\}}$



Prendo $(0,y)$: devo mostrare che $(0,y) \in \overline{\{x>0\}}$ e poi che $(0,y) \in \partial\{x>0\}$ ← si fa a mano trovando vicino a $(0,y)$ dei punti in $\{x>0\}$ e dei punti in $\{x \leq 0\}$

Fissato $r>0$ prendo $(x',y') = (-r/2, y)$ $\notin \{x>0\}$ $\quad (x'',y'') = (r/2, y)$ $\in \{x>0\}$

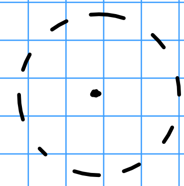
Per avere $\partial\{\varphi<0\} = \{\varphi=0\}$ SERVONO ULTERIORI PROPRIETÀ SU φ

Se avessi voluto fare $\partial\{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ (RIENTRA NELLA PROP)

$$= \partial\Big(\underbrace{\{x^2+y^2 \leq 1\} \cap \{x \geq 0\}}_{\text{CHIUSI}}\Big) = \partial\{x^2+y^2 \leq 1\} \cap \{x \geq 0\} \cup$$
$$\cup \{x^2+y^2 \leq 1\} \cap \partial\{x \geq 0\}$$
$$= \{x^2+y^2=1, x \geq 0\} \cup \{x=0, y^2 \leq 1\}$$

ALTRO ESEMPIO $\qquad A = \{ 0 < x^2+y^2 < 1 \}$

(DISCO BUCATO)



A è aperto $\qquad A = \underbrace{\{x^2+y^2<1\}}_{\text{aperto}} \cap \underbrace{\{x^2+y^2>0\}}_{\text{aperto}}$ ← INTERSEZIONE DI APERTI È APERTO

Prop. Se A e B sono aperti $\Rightarrow$ $A\cup B$ e $A\cap B$ aperti
Se A e B sono chiusi $\Rightarrow$ $A\cup B$ e $A \cap B$ chiusi

① Chi è ∂A $\qquad \left(\partial A = \underset{\{x^2+y^2=1\}}{\overset{\shortparallel}{S(0,1)}} \cup \{(0,0)\} \right)$

Per la prop di prima:

$$\partial A \subset \partial\{x^2+y^2<1\} \cap \{x^2+y^2>0\} \cup \{x^2+y^2<1\} \cap \partial\{x^2+y^2>0\} =$$
$$\{x^2+y^2=1\} \cap \{\cancel{x^2+y^2}>0\} \cup \{x^2+y^2<1\} \cap \underbrace{\{x^2+y^2=0\}}_{??}$$

<u>FATTO</u> $\left(\partial\{x^2+y^2>0\} = \{(0,0)\} \right)$. Lo vedo con le mani:
in ogni intorno di $(0,0)$ c'è un punto fuori (che è $(0,0)$)
e (tanti altri) punti dentro $\{x^2+y^2>0\}$
DUNQUE $(0,0) \in \partial\{x^2+y^2>0\}$ – L'altra inclusione è conseguenza del fatto generale $\partial\{x^2+y^2>0\} \subset \{x^2+y^2=0\}$

$$\Rightarrow \quad \partial A \subset S(0,1) \cup \{(0,0)\}$$

Mi serve anche il viceversa: $\quad S(0,1) \cup \{(0,0)\} \subset \partial A$
(Lo lasciamo perdere...)

ENUNCIAMO VARIE PROPRIETÀ RIGUARDANTI APERTI/CHIUSI e FRONTIERE | Ricordo che dato A ho definito $\mathring{A}$, $\bar{A}$, ∂A

PROPRIETÀ

(a) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$

(b) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ $\qquad \bar{\bar{A}} = \bar{A}$ $\qquad$ ← CONSEGUENZA: $\mathring{A}$ è aperto, $\bar{A}$ è chiuso

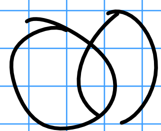
(c) A, B aperti $\Rightarrow$ $A \cup B$ e $A \cap B$ aperti

(d) $\mathring{\bar{A}} \supset \mathring{A}$ $\qquad \overline{\mathring{A}} \subset \bar{A}$

il disco bucato $A = \{0 < x^2+y^2 < 1\}$ ha la proprietà

$\bar{A} = \{ x^2+y^2 \le 1\}$ e allora $\mathring{\bar{A}} = \{x^2+y^2<1\}$

(e) $\mathring{\overline{(A \cap B)}}$ ... $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ $\qquad$ (non vale per l'unione)



( ) $\partial A \cap B \subset (\partial A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \partial B)$

vediamolo $\qquad$ Abbiamo definito $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E} = \bar{E} \cap \mathcal{C}(\mathring{E}) =$

Prendiamo $E = A \cap B \Rightarrow$

$\partial(A \cap B) = \overline{A \cap B} \cap \mathcal{C}\left((A\cap B)^{\circ}\right) = \overline{A \cap B} \cap \mathcal{C}(\mathring{A} \cap \mathring{B}) =$

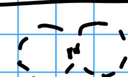
$\boxed{\overline{A \cap B} \cap \left((\mathcal{C}\mathring{A}) \cup (\mathcal{C}\mathring{B}) \right)}$

Se sapessi che $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ potrei andare avanti

$\left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap (\mathcal{C}\mathring{A})\right) \cup \left(\bar{A} \cap \bar{B} \cap (\mathcal{C}\mathring{B})\right) = (\bar{B} \cap \partial A) \cup (\bar{A} \cap \partial B)$

$\partial A \qquad \partial B$

IN GENERALE SO SOLO CHE $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}}$

( $A \cap B = \emptyset$ $\quad \overline{A \cap B} = \emptyset$ MA $\bar{A} \cap \bar{B} = \{P\}$)

e allora ho la formula con l'inclusione

IN QUESTO CALCOLO HO DIM. CHE L'EGUAGLIANZA

$$\partial A\cap B = (\partial A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\partial B)$$

Vale se $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ e QUESTA È VERA SE A e B sono chiusi (tutto si riduce a $A\cap B = A\cap B$) però può essere vero anche in altri casi.

VEDIAMO NELL'ESEMPIO DEL DISCO BUCATO:

$A = \{x^2+y^2<1\}$ $\quad\overline{A} = \{x^2+y^2\le 1\}$ $\quad\partial A = \{x^2+y^2=1\}$

$B = \{x^2+y^2>0\}$ $\quad\overline{B} = \mathbb{R}^2$ $\quad\partial B = \{(0,0)\}$

$\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A}$ $\qquad \overline{A\cap B} = \overline{\{0<x^2+y^2<1\}} = \{x^2+y^2\le 1\}$

si è vist

e allora posso ricavare $\partial(A\cap B) = \{x^2+y^2=1\}\cup\{(0,0)\}$

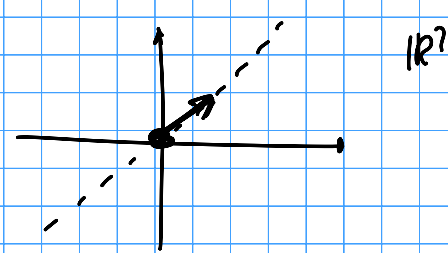
ESEMPIO DI UN LIMITE NON OVVIO (ma con formula)

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$ definita su $A=\{(x,y)\neq(0,0)\} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

è chiaro che $(0,0)$ è di accumulazione per A e quindi ha senso chiedersi se f ha limite per $(x,y)\to(0,0)$ (fuori da $(0,0)$ f è continua per quanto già detto)

<u>TENTATIVO</u> (per capire qual è il limite – se esiste)

<u>Mettersi sulle rette</u>

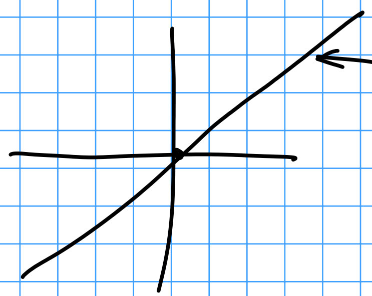


prendo $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e considero $r_{\vec{v}} = \{t\vec{v} : t\in\mathbb{R}\}$

Al variare di $t\in\mathbb{R}$ $\quad t\vec{v}$ descrive una retta

Se faccio $\varphi(t) = f(t\vec{v})$ vado a considerare i valori di f sulla retta r. (è una "restrizione"), $(t \neq 0)$

Calcoliamo $\varphi(t) = \dfrac{(t v_x)\cdot(t v_y)}{(t v_x)^2 + (t v_y)^2} = \dfrac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} \dfrac{v_x v_y}{(v_x)^2 + (v_y)^2}$



Per esempio sulla diagonale $\{x=y\} = \{(t,t) \quad t \in \mathbb{R}\}$

$f(x,x) = \frac{1}{2}$

$f(0,y) = f(x,0) = 0$

A seconda della retta, $(x,y) \to (0,0)$ ma $f(x,y)$ ha valori diversi $\Longrightarrow \nexists$ limite

<u>Altro esempio</u> (simile - apparentemente)

$$f(x,y) = \frac{x y^2}{x^2 + y^2}$$

Riprovo con le rette: $f(t v_x, t v_y) = \dfrac{(t v_x)(t v_y)^2}{t^2 v_x^2 + t^2 v_y^2} = t \dfrac{v_x v_y^2}{v_x^2 + v_y^2}$

$\longrightarrow 0$ se $t \to 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Se } f \text{ ammette limite } \ell \Rightarrow \ell = 0}$

Vediamo se riusciamo a dim. che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

PER QUESTO DEVO APPLICARE LA DEF. DI LIMITE.

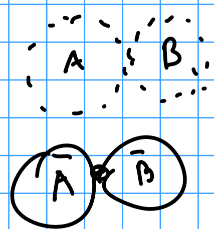
Però posso cercare una semplificazione cercando una g più semplice tale $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = 0$

IN QUESTO CASO POSSO USARE LA DISEGUAGLIANZA

$$2|xy| \le x^2 + y^2 \qquad (\text{è facile da dim.})$$

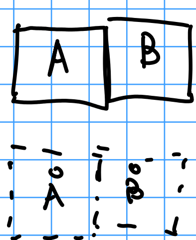
$$|f(x,y)| \le \frac{|y| \, \frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} = \frac{|y|}{2}$$

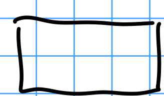
È chiaro che $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|}{2} = 0 \Rightarrow f \to 0$

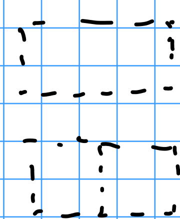


$A \cap B = \emptyset$ $\qquad$ $\overline{A \cap B} = \emptyset$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{P\}$



$A \cup B =$ 

$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ 

$\mathring{A} \cup \mathring{B}$