Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 05 08/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

FUNZIONI CONTINUE

Def. $A \subset \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}^M$ (A è il dominio di f)

$x_0 \in A$. Dico che f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho > 0$ t.c.

$$x \in A \text{ e } x \in B(x_0, \rho) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$$

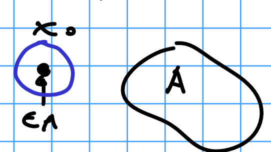
$\simeq$ $f(x)$ è vicino (quanto voglio) a $f(x_0)$ pur di prendere x (abbastanza) vicino a x_0

CONFRONTO CON LA DEF. DI LIMITE.

1. x_0 deve essere in A (se no non ha senso $f(x_0)$)

2. x_0 non è necessariamente p.to di accumulazione per A

PERÒ se x_0 è isolato



qualunque sia f $\Rightarrow$ f è continua in x_0

INFATTI se x_0 è isolato $\exists \rho_0 > 0$ tale che $B(x_0,\rho_0) \cap A = \{x_0\}$

Allora nella definizione sopra, per qualunque $\varepsilon > 0$ posso prendere $\delta = \rho_0$ e ottenere che l'unico x in $A \cap B(x_0,\rho_0)$ è $x = x_0$ e naturalmente $f(x_0) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ $(\forall \varepsilon > 0)$

Nei punti isolati la continuità è banale.

③ Se invece $x_0 \in A$ ed è di accumulazione per A SI HA:

$$f \text{ continua in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

(a) f è continua in $x_0 \iff$ tutte le sue componenti f_i $(i = 1..M)$ sono continue in x_0

(b) La funzione $f(x) = K \in \mathbb{R}^M$ (costante) è continua in ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$

(c) Le funzioni $f(x) = x_i$ $(i = 1..N)$ sono continue (da $\mathbb{R}^N$ in $\mathbb{R}$)

(d) somme, prodotti di funzioni continue (a valori reali) è continua. Il quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ è continuo in x_0 se $g(x_0) \neq 0$

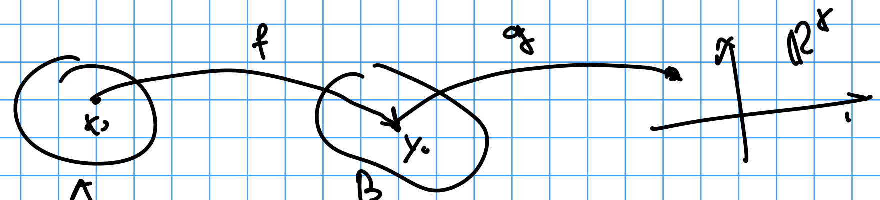
(e) Composizione di continue è continua!

$f: A \to B$ $\quad A \subset \mathbb{R}^N \quad B \subset \mathbb{R}^M \quad x_0 \in A$

$g: B \to \mathbb{R}^K \quad y_0 = f(x_0) \in B$

f continua in x_0, g continua in y_0 $(= f(x_0))$ $\Longrightarrow$

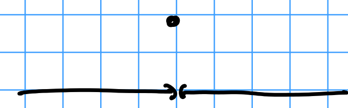
$g \circ f$ (da $A \to \mathbb{R}^K$) è continua in x_0



OSS. Se $f : A \to \mathbb{R}^N$, x_0 di acc. per A,

Allora f ammette limite in x_0 SE E SOLO SE si può definire f in x_0 in modo che la f "estesa" sia continua in x_0. INOLTRE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \text{quell'unico valore } f(x) \text{ che rende } f \text{ continua in } x_0.$$



Per esempio se $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

f NON È CONTINUA IN $x_0 = 0$. Se la ridefinisco $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ è continua in zero $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

PROPRIETÀ

Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua. Allora

- Per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^M$ l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \in A\} \text{ è aperto in } \mathbb{R}^M$$

controimmagine di A rispetto a f; $f^{-1}(A)$

LA CONTROIMMAGINE di un aperto è aperto

ANALOGAMENTE $f^{-1}(C)$ è chiuso, se C è chiuso

CASI SEMPLICI: $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < c\}$ o $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > c\}$ SONO APERTI

perché sono le controimmagini degli intervalli $]-\infty, c[$ / $]c, +\infty[$ che sono aperti in $\mathbb{R}$

$\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \leq c\}$ / $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \geq c\}$ / $\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) = c\}$

SONO TUTTI CHIUSI, dato che sono controimmagini di

$]-\infty, c]$ / $[c, +\infty[$ / $\{c\}$ che sono CHIUSI IN $\mathbb{R}$

DUNQUE, per esempio,

$$B(0,R) = \{ X \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R \} \text{ è aperto}$$

$$D(0,R) = \overline{B(0,R)} = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq R \} \text{ è chiuso}$$

$$S(0,R) = \{ x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = R \} \text{ è chiuso}$$

Tutto questo perché la norma $n(x) = \|x\|$ è continua

Quest'ultimo fatto si può dimostrare usando la dis. triangolare:

Se fisso $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e prendo $x \in \mathbb{R}^N$ ecc. $\Rightarrow$

$$(\star) \quad \big| \|x\| - \|x_0\| \big| \leq \|x - x_0\|$$

INFATTI

$$\|x\| = \|x - x_0 + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\| \Rightarrow$$

$$\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\|$$

Analogamente

$$\|x_0\| = \|x_0 - x + x\| \leq \underbrace{\|x_0 - x\|}_{= \|x - x_0\|} + \|x\| \Rightarrow$$

$$\|x_0\| - \|x\| \leq \|x - x_0\|$$

SONO EQUIVALENTI A $(\star)$

Da $(\star)$ deduco che la norma è continua. INFATTI

dato $\varepsilon > 0$ prendo $\boxed{\rho = \varepsilon}$ VEDO SUBITO (da $(\star)$) che

$$\|x - x_0\| < \rho \Rightarrow \big| \|x\| - \|x_0\| \big| < \varepsilon$$

$\leftarrow$ HO VERIFICATO LA DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ

$n(x) = \|x\|$ $\qquad |n(x) - n(x_0)| < \varepsilon$

se $\|x - x_0\| < \rho$

QUESTA OSSERVAZIONE SI PUÒ GENERALIZZARE:

Def. Dico che $f : A \to \mathbb{R}^M$ $A \subset \mathbb{R}^N$ è LIPSCHITZIANA se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$ $(L > 0)$ tale che

$$\| f(x) - f(x_0) \|_{\mathbb{R}^M} \leq L \cdot \| x - x_0 \|_{\mathbb{R}^N}$$

Teorema Se f è Lip. $\Rightarrow$ f è continua

Dim. Dato $\varepsilon > 0$ prendo $\rho = \dfrac{\varepsilon}{L}$ . . . .

Allora se $\| x - x_0 \| < \rho = \dfrac{\varepsilon}{L}$ $\Rightarrow$

$$\| f(x) - f(x_0) \| \leq L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

(la norma è lip di costante $L = 1$ $\leftarrow$ la dis $(\star)$)