Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 04 07/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Abbiamo introdotto le NORME sugli spazi vettoriali ($\mathbb{X}$)

Data una norma $\|\cdot\|$ è definita la "DISTANZA"

Tra i punti:

$$\mathrm{dist}(x,y) = \|x-y\| \qquad x,y \in \mathbb{X}$$

(la distanza risulta invariante se traslo o ruoto i punti)

Data una distanza $\longrightarrow$ NOZIONE DI LIMITE

PARENTESI (torniamo per un momento sui prodotti scalari)

$$\mathbb{X} \ni x, y \longrightarrow x\cdot y \in \mathbb{R} \qquad \text{con le proprietà dette.}$$

PROPRIETÀ (Disuguaglianza di Schwartz) Se ho un prodotto scalare nello spazio vettoriale $\mathbb{X}$, allora

$$(*) \qquad |x\cdot y| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x,y \in \mathbb{X}$$

(dove la norma è quella definita da $\|x\| = \sqrt{x\cdot x}$)

Inoltre vale l'uguaglianza in $(*)$ se e solo se x e y sono sulla stessa retta.

DIM. Se $y=0$ è tutto ovvio - suppongo $y \neq 0$. Considero

$$\varphi(t) = \| x - t y \|^2 \qquad \text{per } t \in \mathbb{R}$$

$$\overset{\shortparallel}{(x - t y)\cdot(x - t y)} = x \cdot x - x\cdot(ty) - (ty)x + (ty)\cdot(ty) =$$
$$\|x\|^2 - 2t\, x\cdot y + t^2 \|y\|^2$$

Dunque $\varphi(t)$ è un polinomio di II° grado e $\varphi(t) \geq 0 \ \forall t$

$\Rightarrow$ il delta è ≤ 0, cioè

$$4(x\cdot y)^2 - 4\|y\|^2\|x\|^2 \leq 0 \qquad \text{cioè}$$
$$(x\cdot y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \iff$$
$$|x\cdot y| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad \Leftarrow \text{ho DIM. } (*)$$

Se in $(*)$ vale "=" $\Rightarrow$ il delta vale zero $\Rightarrow$ φ ha una sola radice (doppia) $t_0 = \dfrac{x\cdot y}{\|y\|^2}$ e cioè

$0 = \varphi(t_0) \iff \|x - t_0 y\|^2 = 0 \iff x = t_0 y$ (x e y sulla stessa retta)

NOTA Se $x\cdot y = \|x\|\cdot\|Y\| \Rightarrow$ X e Y hanno lo stesso verso

cioè $x = t_0 y$ con $t_0 \geq 0$

#

Dalla dis. di Schwartz si ricava che effettivamente $\|x\| = \sqrt{x\cdot x}$ verifica la dis. triangolare

(T) $\qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dim. Passo ai quadrati (tutto è ≥ 0)

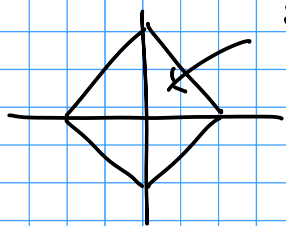
$$(x+y)\cdot(x+y) = \|x+y\|^2 \leq \cancel{\|x\|^2} + 2\|x\|\,\|y\| + \cancel{\|y\|^2}$$
$$\overset{\shortparallel}{\cancel{\|x\|^2} + 2\, x\cdot y + \cancel{\|y\|^2}} \iff x\cdot y \leq \|x\|\cdot\|y\| \quad \text{VERA PER SCHWARTZ}$$

MORALE Ogni volta che ho un prodotto scalare ho una norma

. Si può vedere che NON TUTTE LE NORME PROVENGONO DA UN PR. SCAL.

La norma $|||P||| = |x| + |y|$ (se $P=(x,y)$) IN $\mathbb{R}^2$

si può dimostrare che non proviene da un prod scal.



il disco $\{P \in \mathbb{R} : |||P||| \leq 1\}$

ESEMPI (NON STANDARD)

$X = \{$ funzioni continue $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \}$

FATTI X è uno spazio vettoriale: infatti se f, g sono due funzioni continue da $[0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}$ e se $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$af + bg$ è continua da $[0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}$

Questo spazio di solito si indica con $C(0, 2\pi)$

Osservo che in $C(0, 2\pi)$ posso definire un prodotto scalare

$$f \cdot g = \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

Si verifica che:

- $f \cdot g$ è bilineare:

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2) \cdot g = \int_0^{2\pi} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))\, g(t)\, dt =$$

$$c_1 \int_0^{2\pi} f_1(t) g(t) dt + c_2 \int_0^{2\pi} f_2(t) g(t) dt$$

(e lo stesso si fa rispetto a g)

- $f \cdot g = g \cdot f$

f è la funzione nulla

- $f \cdot f \geq 0$ e vale zero solo per $f = 0$ INFATTI

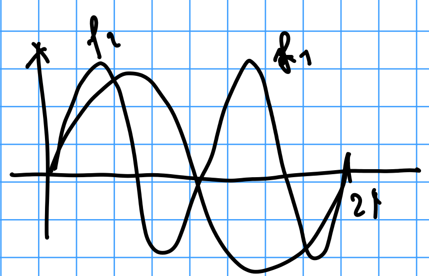
$f \cdot f = \int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \geq 0$. Questo integrale fa zero solo quando f^2 (e quindi f) è identicamente nullo ($f(t)=0 \ \forall t$)

A questo prodotto scalare è associata la norma

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt}$$

Dentro questo spazio $C(0,2\pi)$ posso considerare

$$f_n(t) = \sin(nt)$$ al variare di n in $\mathbb{N}$



$\sin(t), \sin(2t), \sin(3t), \dots$

DICO CHE $f_i \cdot f_j = 0$ se $i \neq j$ (esercizio di integrazione)

$$\int_0^{2\pi} \sin(it)\sin(jt)\,dt = \text{(integro due volte per parti)} \qquad (j \neq 0)$$

$$\underbrace{\left[\sin(it)\left(-\frac{\cos(jt)}{j}\right)\right]_0^{2\pi}}_{\substack{=0 \text{ a causa del seno} \\ \sin(0)=0=\sin(2i\pi)}} + \int_0^{2\pi} i\cos(it)\frac{\cos(jt)}{j}\,dt =$$

$$\frac{i}{j}\left[\cos(it)\frac{\sin(jt)}{j}\right]_0^{2\pi} = +\frac{i}{j}\int_0^{2\pi} i\sin(it)\frac{\sin(jt)}{j}\,dt =$$

$$\left(\frac{i}{j}\right)^2 \int_0^{2\pi} \sin(it)\sin(jt)\,dt \qquad i \neq j$$

$\neq 1$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \sin(it)\sin(jt)\,dt = 0$$

(si può vedere che $\int_0^{2\pi} (\sin(it))^2\,dt = \pi$)

HO TROVATO INFINITE FUNZIONI TRA LORO ORTOGONALI (e dunque linearmente indipendenti) in $X = C(0, 2\pi)$

$\Rightarrow \quad \dim(X) = +\infty$

Riprendiamo il discorso iniziale. D'ora in poi $X = \mathbb{R}^N$ con N intero.

Def. Dato $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\rho > 0$ definisco

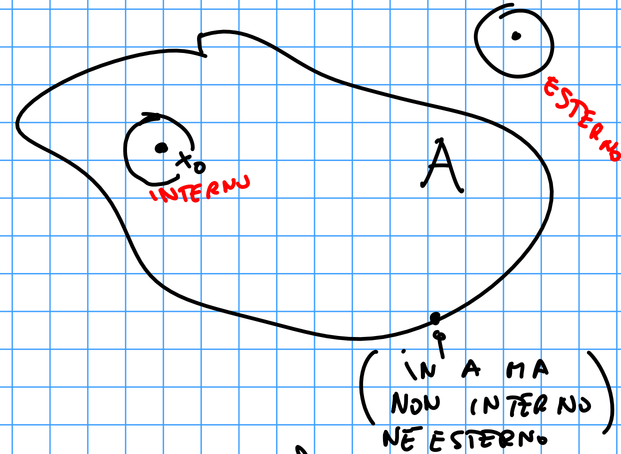
$$B(x_0, \rho) = \{ x \in \mathbb{R}^N : \| x - x_0 \| < \rho \}$$

disco di centro x_0 e raggio ρ (o anche intorno di x_0, ~)

Def. Dato $A \subset \mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ dico che:

(a) x_0 è interno ad A se esiste $\rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subset A$

(ne segue che $x_0 \in A$, ma è vero di più. DIRE "x_0 INTERNO AD A" è diverso da "x_0 IN A")



(b) x_0 è esterno ad A se esiste $\rho > 0$ tale che

$B(x_0, \rho) \cap A = \emptyset$ ($B(x_0, \rho)$ è "tutto fuori da A")

(c) Dico che x_0 è di frontiera per A se non è né interno né esterno.

$\complement A$ = complementare di $A = \{x : x \notin A\}$

SCRIVERÒ

$\mathring{A} = \{ x \in \mathbb{R}^N : x \text{ è interno} \}$

$\mathring{(\complement A)} = \{ x \in \mathbb{R}^N : x \text{ è estrerno} \} = \{ x \in \mathbb{R}^N : x \text{ è interno a } \complement A \}$

$\partial A = \{ x : x \text{ di frontiera per } A \} = \{ x : x \text{ è di frontiera per } \complement A \}$

DUNQUE $\quad \mathbb{R}^N = \mathring{A} \cup \mathring{\complement A} \cup \partial A$

DISGIUNTI

INOLTRE PONGO $\quad \bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$. Dico che

- $\mathring{A}$ è la parte interna di A
- ∂A è la frontiera di A
- $\bar{A}$ è la chiusura di A

<u>Def.</u> Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^N$ dico che

A è <u>APERTO</u> se $A = \mathring{A}$ (cioè tutti i pti di A sono interni ad A)

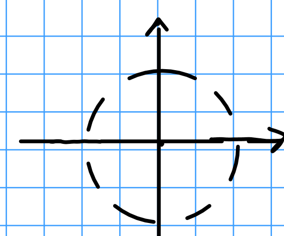
A è <u>CHIUSO</u> se $A = \bar{A}$

<u>Varie proprietà</u>

- $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$ $\quad (\Rightarrow A = A \cup \partial A)$
- A è chiuso $\iff \partial A \subset A$
- A è aperto $\iff \partial A \cap A = \emptyset$

<u>ESEMPIO</u> $\quad B = B(0,1) = \{P = (x,y) : \|P\| < 1\} = \{P = (x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$

B = cerchio di centro l'origine e raggio 1 senza la circonferenza



DICO CHE

(1) B è <u>aperto</u>

(2) $\partial B \; (= S) = \{P = (x,y) : \|P\| = 1\} = \{P = (x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

(3) $\bar{B} = B \cup S = \{P : \|P\| \leq 1\}$

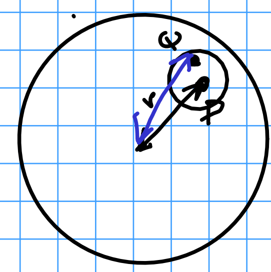
<u>VERIFICA</u> (1) Devo mostrare che tutti i punti di B sono interni a B. In effetti se $P \in B$ $\quad P = (x_0, y_0)$

per definizione $r^2 = x_0^2 + y_0^2 < 1$.

Se scelgo ρ in modo che $r+\rho<1$

e prendo un qualunque $Q=(x,y)$

tale che $Q \in B(P,\rho)$



Quanto dista Q da zero??

$$\|Q\| = \|P+Q-P\| \le \underbrace{\|P\|}_{=r} + \underbrace{\|Q-P\|}_{<\rho} < r+\rho < 1$$

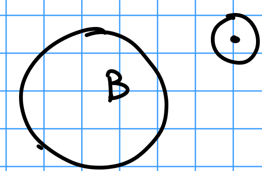
DUNQUE $\quad B(P,\rho) \subset B = B(0,1) \Rightarrow P$ è interno a B

(tutti i Q che distano da P meno di ρ, distano da $\vec{O}$ meno di 1) $\quad$ B è aperto

(2) Dal punto 1 si deduce che $\partial B \cap B$, cioè tutti i punti P in ∂B devono avere $\|P\| \geq 1$

CON LO STESSO RAGIONAMENTO DI (1) VEDO CHE

$C = \{P : \|P\| > 1\}$ è aperto



$\Rightarrow \quad \partial B \cap C = \emptyset$

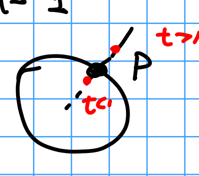
$\Rightarrow \quad \partial B \subset \{P : \|P\| = 1\}$

MI MANCA DI VEDERE CHE $\partial B = \{P : \|P\| = 1\}$

Per questo prendo un punto P con $\|P\| = 1$

e prendo tP per t vicino a 1 $(t \in \mathbb{R})$

se $t>1$ $tP \notin B$, se $t<1$ $tP \in B$



$\Rightarrow \quad P$ è di frontiera (**)

(**) <u>FATTO</u> P è di frontiera per $A \iff$ per ogni raggio $\rho>0$ trovo $P_1 \in B(P,\rho)$ $P_1 \in A$, trovo $P_2 \in B(P,\rho)$ $P_2 \notin A$

Def. $A \subset \mathbb{R}^N$ $x_0 \in \mathbb{R}^N$ è di <u>accumulazione</u> per A

se per ogni $\rho > 0$ esiste $x \in A$, $x \in B(x_0, \rho)$, $x \neq x_0$

: Ogni intorno di x_0 contiene punti di A diversi da x_0

Se $x_0 \in A$ e x_0 non è di accumulazione dico che x_0

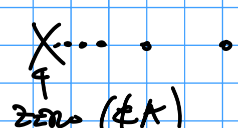
è un <u>PUNTO ISOLATO DI A</u>

<u>Per esempio</u> se mi metto in $\mathbb{R}$ e prendo $A = \mathbb{N} = \{$ interi $\}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ non ha parte interna e tutti i suoi punti sono isolati

Se invece prendo $A = \{ x = 1/n$ con $n \in \mathbb{N} \}$ $\Rightarrow$

lo zero è (l'unico) punto di accumulazione per A

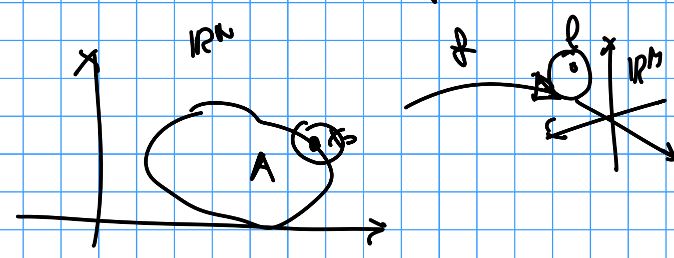


(per ogni $\rho > 0$ esistono dei punti $\frac{1}{n} \in]-\rho, \rho[$)

<u>DEFINIZIONE DI LIMITE</u> Suppongo che

(x_0 può non essere in A)

- $A \subset \mathbb{R}^N$ · x_0 di accumulazione per A
- $f : A \to \mathbb{R}^M$
- $\ell \in \mathbb{R}^M$



Dico che ℓ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 SE

(e scrivo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \rho > 0$ tale che:

$$x \in A, \quad x \in B(x_0, \rho) \quad x \neq x_0 \implies f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$$

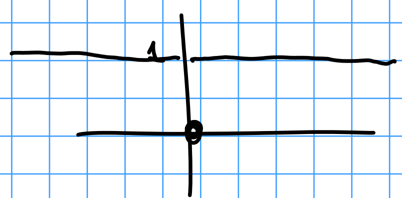
($f(x)$ è vicino quanto voglio a ℓ, pur di avvicinare x a x_0 :

al solito ρ dipende da ε – e da x_0)

POSSO ANCHE SCRIVERE

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0 \ \text{t.c.} \qquad f\left(A \cap B(x_0,\rho) \setminus \{x_0\}\right) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

NON SI CHIEDE NULLA SU $f(x_0)$ – IL LIMITE NON DIPENDE IN NESSUN MODO DALL'EVENTUALE VALORE DI f IN x_0



← IL LIMITE È 1 !!

<u>PROPRIETÀ</u> del limite.

(1) Se $f: A \to \mathbb{R}^M$ posso scrivere $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$ dove f_i si chiamano le "componenti" di f. ALLORA

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i \qquad \left(\text{dove } \ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_M \end{pmatrix} \right)$$

(2) (Linearità) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$

e se $c, d \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0} \left(c f(x) + d g(x) \right) = c\ell_1 + d\ell_2$

(3) Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_2$ $\Rightarrow$ $\ell_1 = \ell_2$

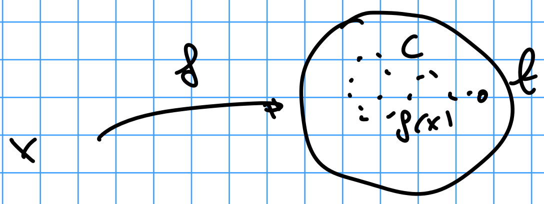
(4) Se $C \subset \mathbb{R}^M$ è chiuso, se $f(x) \in C \ \forall x \in A$

e se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ $\Rightarrow$ $\ell \in C$

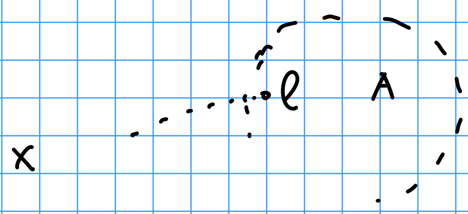
(4') Se A è aperto, $A \subset \mathbb{R}^M$, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$

e $\ell \in A$ $\Rightarrow$ $f(x) \in A$ <u>per le x VICINE A x_0</u>

CIOÈ $\exists \rho > 0$ t.c. $x \in A, x \in B(0,\rho), x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in A$



· SE $f(x)$ è un chiuso $\Rightarrow$ il limite è ancora nel chiuso



· Se il limite è in un aperto $\Rightarrow$ $f(x)$ è in quell'aperto — per x VICINO A x_0

Sono gli "equivalenti" della permanenza del segno e della monotonia del limite

IN PARTICOLARE se $f : A \to \mathbb{R}$

$$f \geq 0 \Rightarrow \lim f(x) \geq 0$$

$$\lim f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \text{per } x \text{ vicino a } x_0$$

Perché $\{y > 0\}$ è aperto $\{y \geq 0\}$ è chiuso IN $\mathbb{R}$