Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 03 02/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Una forma quadratica $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione data da

$$\phi(u) = a(u,u)$$

dove a è un'applicazione bilineare - simmetrica -
Questo equivale a dire che esiste una matrice simmetrica A $N \times N$ tale che

$$\phi(u) = u^t \cdot A \cdot u \qquad \forall u \in \mathbb{R}^N$$

(ricordo che gli elementi di $\mathbb{R}^N$ li vedo come matrici $1 \times N$ - come colonne).

<u>Fatto</u> La ϕ è ≥ 0 / oppure $\phi(u) > 0$ $\forall u \neq 0$ $\iff$ la matrice A ha tutti gli autovalori ≥ 0 / oppure > 0

(So che A - essendo simmetrica ha tutti autovalori reali - ha una base di autovettori ortogonali $\leftarrow$ TEOR. SPETTRALE)

<u>OSS.</u> Se A è simmetrica e se $\{e_1 \ldots e_N\}$ è una base

ortonormale di autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_N$ $\Rightarrow$

$$\boxed{A = M D M^t}$$ dove

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_N)$ $\qquad$ $M = [e_1 \cdots e_N]$

$\underline{M^t = M^{-1}}$ dato che $(M^t \cdot M)_{ij} = M^i \cdot M^j = e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & j = i \end{cases}$

DUNQUE $M^t \cdot M = I$

<u>Criterio (di Sylvester)</u> Data una matrice A $N \times N$ simmetrica voglio sapere se la forma $\Phi(u) = u^t A u$ è ≥ 0 o se è > 0. Per questo introduco:

(1) i minori <u>principali</u> $\to$ tutti i minori di A "a cavallo della diagonale": A' è un minore principale se si ottiene da A cancellando LO STESSO INSIEME di righe e di colonne.
Posso identificare questi minori scegliendo un sottoinsieme $I \subsetneq \{1, 2, \dots, N\}$ e indico

A_I = minore ottenuto cancellando le righe e le colonne degli indici $i \in I$

(2) <u>Minori principali dominanti</u>: gli N minori principali cancellando le ultime K righe e K colonne, quando K varia da 0 e $N-1$

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad$ A_1 $\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ \cancel{4} & 2 & \cancel{3} & 1 \\ \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{7} & \cancel{-2} \\ \cancel{1} & 1 & \cancel{2} & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

I minori principali dominanti di A sono

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad [1]$$

Il criterio dice che, se A è simmetrica, allora

- $A \geq 0 \iff$ tutti i minori principali hanno determinante ≥ 0
- $A > 0 \iff$ tutti i minori dominanti hanno det > 0

(NO DIM.)

Passando a $-A$ ottengo il criterio per avere $A < 0$, $A \leq 0$

($A \leq 0 \iff -A \geq 0$ / $A < \iff -A > 0$)

- $A \leq 0 \iff$ det $A' \leq 0$ se A' è un minore principale di dimensione dispari
  ≥ 0 se A' ... di dim pari
- $A < 0 \iff (-1)^k \det A \geq 0$ dove k = dimensione del minore
  ($\forall$ minore principale)

La cosa più semplice per vedere se $A \leq 0$ / $A < 0$ è applicare il criterio a $-A$

ESEMPI

$$\phi(x,y,z) = -3x^2 + y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}\, xz$$

Mi chiedo qual è la "segnatura" di ϕ

(se è ≥ 0, > 0, ≤ 0, < 0, NESSUNA DI QUESTE)

(1) MI SERVE LA MATRICE.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Se uso Sylvester guardo (per primo caso) i minori dominanti

$$[-3] \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A \quad \leftarrow \text{calcolo i determinanti}$$

$$\underbrace{-3 \qquad\qquad -3}_{\text{VA MALE}}$$

(non occorre calcolare $\det A$)

(se fosse ≥ 0 dovrei avere tutti i det. ≥ 0

se fosse ≤ 0 dovrei avere i minori ALTERNATIVAMENTE ≤ 0, ≥ 0)

QUESTA MATRICE HA SIA AUTOV. >0 che AUTOV. <0 !!

Come esercizio proviamo a calcolare questi autovalori

calcolo $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$

$$-(\lambda+3) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} + \sqrt{2} \det \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 1-\lambda & 0 \end{bmatrix} =$$

$$-(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+2) + \sqrt{2}(\lambda-1)\sqrt{2} =$$

$$(\lambda-1)\left[2 - (\lambda+3)(\lambda+2)\right] = (\lambda-1)\left(2-(\lambda^2+5\lambda+6)\right) =$$

$$-(\lambda-1)(\lambda^2+5\lambda+4) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+4)$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -4 \\ -1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ TRE AUTOVALORI $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -4$

(non hanno tutti lo stesso segno)

VOLENDO POTREI TROVARE GLI AUTOVETTORI:

$\boxed{\lambda = +1}$ cerco $e_1 \neq 0$ tale che $A e_1 = e_1 \iff$

$e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ deve essere $\underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{A-I} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\iff \begin{cases} -4x + \sqrt{2}\, z = 0 \\ \sqrt{2}\, x - 3z = 0 \\ y \text{ libero} \end{cases} \iff \begin{array}{l} x = z = 0 \\ y \text{ qualunque} \end{array}$

$\det \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} \neq 0$ e il sistema in (x, z) ha solo la soluzione nulla

$\Rightarrow$ posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (così $\|e_1\| = 1$)

$\underline{\lambda = -1}$ Nello stesso modo cerco $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c.

$0 = (A + I) e_1 \iff \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \sim\sim \\ y = 0 \\ z = \sqrt{2}\, x \end{cases}$

posso prendere $e_2 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \sqrt{2}\, x \end{bmatrix}$ e scelgo x in modo che $\|e_2\| = 1$

$1 = \|e_2\|^2 = x^2 + 2x^2 \iff 3x^2 = 1 \iff x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

Posso prendere $e_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda = -4}$ Posso rifare gli stessi calcoli OPPURE RICORDARMI che e_3 deve essere ORTOGONALE a e_1 e e_2

VEDO - a occhio - che posso prendere

$$e_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/3 \\ 0 \\ -\sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \qquad \left(e_2 \cdot e_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \right)$$

PROVARE A VERIFICARE che effettivamente $Ae_3 = -4\, e_3$

Da tutto ciò segue che

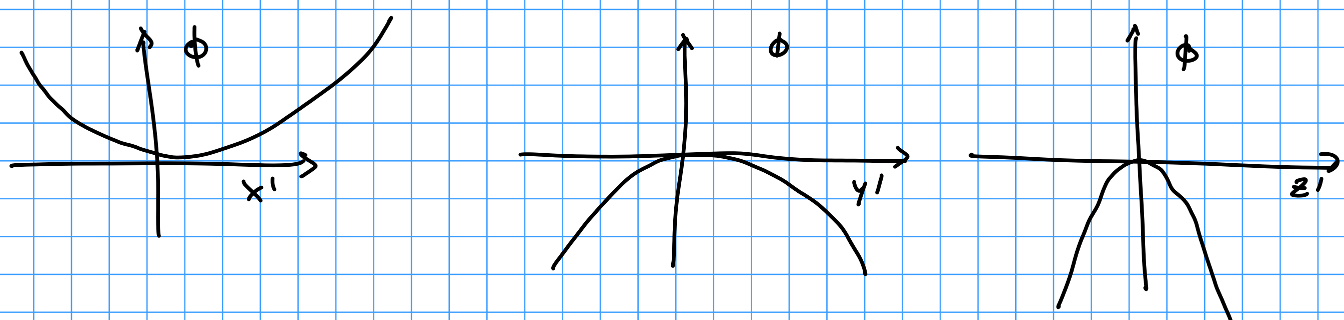
$$A = M^t D M \qquad \text{dove}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$$

(provare a vedere se torna ...)

QUESTO MI DICE CHE se dispongo gli assi lungo e_1 e_2 e_3 e chiamo (x', y', z') le coordinate rispetto a e_1, e_2, e_3 $\Rightarrow$

$$\phi(x', y', z') = (x')^2 - (y')^2 - 4\,(z')^2$$



ESEMPIO $\quad \phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Proviamo ad applicare Sylvester:

- $\det [1] = 1 > 0$
- $\det \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 1/4 = \frac{3}{4} > 0$
- $\det A = 1 + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$

LA FORMA È > 0

Facciamo anche in questo caso il calcolo degli autovettori/autovalori:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + $$
$$- \left((1-\lambda)\frac{1}{4} + (1-\lambda)\frac{1}{4} + (1-\lambda)\frac{1}{4} \right)$$

$$= (1-\lambda)^3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}(1-\lambda) =$$

$$1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\lambda =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{4}\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 \qquad 2 \text{ è radice !!}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{2} + 3 \cdot 4 - 8 = -4 + 12 - 8 = 0 \quad \text{!! } \underline{\text{SÌ}}$$

DIVISIONE

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 3 & -\frac{9}{4} & 1/2 \\ 2 & & -2 & 2 & -1/2 \\ \hline & -1 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array}$$

$$\Longrightarrow p(\lambda) = (\lambda - 2)\underbrace{\left(-\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{4}\right)}_{-(\lambda - 1/2)^2}$$

$$-1 \pm \sqrt{1 - 1}$$

$$\boxed{p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1/2)^2}$$

devono esistere 1 autovettore con $\lambda = 2$

" 2 autov. indip. " con $\lambda = 1/2$

$\boxed{\lambda = 2}$ Cerco $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c. $\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y+z}{2} \\ \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} - y + \dfrac{z}{2} = 0 \\ \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{4} + \dfrac{y}{2} - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{y+z}{2} \\ -\dfrac{3}{4}y + \dfrac{3}{4}z = 0 \\ - \ \_\_\_ \end{cases} \Leftarrow \boxed{y = z}$$

posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ se normalizzo $\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}}$

$\boxed{\lambda = 1/2}$ basta prendere lo spazio ortogonale a e_1

cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\{ x + y + z = 0 \}$

PIANO ORTOGONALE A e_1

= "autospazio relativo a $\lambda = 1/2$"

$\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}$ e_3 deve verificare $\begin{cases} x = y \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$

$e_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ normalizzo $\boxed{e_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}}$

$6\alpha^2 = 1 \qquad \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

Come nel caso precedente la matrice $M = [e_1, e_2, e_3]$

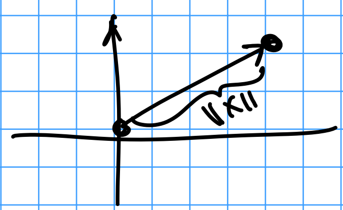
mi dà il cambio di base rispetto alla quale ϕ diventa

$$\phi(x', y', z') = 2(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}(z')^2$$

LASCIO ALLEGATI ALTRI ESEMPI

Ricordo che abbiamo definito la norma in $\mathbb{R}^N$ ponendo $\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_N)^2}$ dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$

La norma di X misura la distanza di X da zero

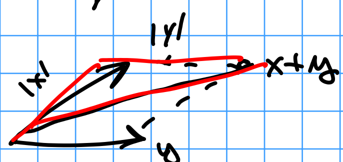


SI VEDE CHE LA NORMA VERIFICA LE SEG. PROPRIETÀ:

(1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(2) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ (omogenea di grado 1)

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ci torniamo...



(in un triangolo ogni lato ha lunghezza ≤ somma degli altri due)

LA NORMA EUCLIDEA NON È L'UNICA FUNZIONE CON LE PROPRIETÀ (1) (2) (3). Per esempio in $\mathbb{R}^2$

$|||(x, y)||| = |x| + |y|$ è ovvio che valgono 1 e 2

Anche la 3 è facile da verificare:

$$|||(x_1, y_1) + (x_2, y_2)||| \leq |||(x_1, y_1)||| + |||(x_2, y_2)|||$$

$$\Updownarrow$$

$$|x_1 + x_2| + |y_1 + y_2| \leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$$

segue immediatamente perché $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$
$|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2|$

Def. Chiamo <u>norma</u> in uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ una qualunque funzione $n : \mathbb{X} \to [0,+\infty[$ con le proprietà (1) (2) e (3).
$(\{x \geq 0\})$

Allora la $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ è la NORMA EUCLIDEA,

ma è possibile inventarsi anche delle norme diverse

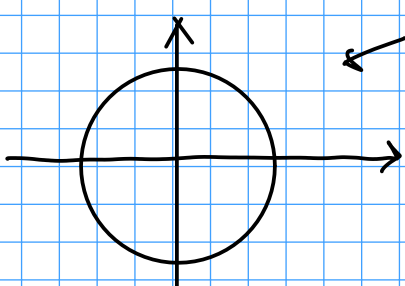
SE È DEFINITA UNA NORMA n su $\mathbb{X}$

<u>Nel seguito</u> considero i <u>dischi di centro x_0 e raggio r</u>

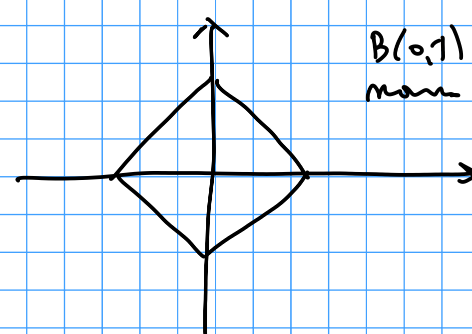
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X} : \underbrace{n}_{\text{norma}}(x - x_0) < r\}$$

("moralmente" tutti i punti x che distano da x_0 meno di r)

IN $\mathbb{R}^2$, nel caso della norma euclidea, i dischi sono rotondi



$B(0,1)$ con la norma euclidea



$B(0,1)$ con la norma $|||\cdot|||$

Con l'altra norma $\quad B(0,1) = \{\underbrace{(x,y)}_{n((x,y)-(0,0))} : |x| + |y| < 1\}$

Def. Se $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale e n è una norma su $\mathbb{X}$ dico che $(\mathbb{X}, n)$ è uno spazio vettoriale normato

1 Esercizi sulla segnatura di forme quadratiche

Studiare la segnatura delle seguenti forme quadratiche mediante il criterio di Sylvester:

1. $\Phi(x, y) = -x^2 + 10xy - y^2$;
2. $\Phi(x, y) = -x^2 + 2\sqrt{2}xy - 2y^2$;
3. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$;
4. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$;
5. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$;
6. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$;
7. $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$.

Negli esercizi da (1) a (6) si trovino anche gli autovalori e gli autovettori della matrice corrispondente (verificando che effettivamente il segno degli autovalori corrisponde con quello desunto dal criterio).