Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 02 01/10/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

$\mathbb{X}$ $\mathbb{X}'$ spazi vettoriali: $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_N\}$ base su $\mathbb{X}$

$\mathcal{B}' = \{v_1' \dots v_M'\}$ base su $\mathbb{X}'$

$L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ lineare, allora se prendo

$$A = \begin{array}{ccc} \Big[\, [L v_1]_{\mathcal{B}'}, & \dots, & [L v_N]_{\mathcal{B}'} \,\Big] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{prima colonna} & & N\text{-esima colonna} \end{array}$$

$\Rightarrow$ A è $M \times N$ e ha la proprietà:

$$[L v]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}} \qquad \forall v \in \mathbb{X}$$

A rappresenta L rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

NOTAZIONE $\qquad A = [L]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$

Fatto se $L_1 : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$, $L_2 : \mathbb{X}' \to \mathbb{X}''$

$\mathbb{X}''$ è un altro spazio e $\mathcal{B}'' = \{v_1'' \dots v_L''\}$ base su $\mathbb{X}''$

Allora posto $L = L_2 \circ L_1 \quad (: \mathbb{X} \to \mathbb{X}'')$

$$[L]_{\mathcal{B}''\mathcal{B}} = [L_2]_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'}[L_1]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Se in particolare $\mathbb{X} = \mathbb{X}'$ e $L = I$

$$M = M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \quad \leftarrow \text{cambio di coordinate}$$

$$M[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}'}$$

e questa M è fatta così: $M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \Big[[v_1]_{\mathcal{B}'} \cdots [v_N]_{\mathcal{B}'} \Big]$

$$\{v_1 \cdots v_N\} = \mathcal{B}$$

Nel caso $\mathbb{X} = \mathbb{R}^N$ allora $v = [v]_{\hat{\mathcal{B}}}$ $\circledast$

dove $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{e}_1 \cdots \hat{e}_N\}$ $\quad \hat{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ posto i-esimo

$\hat{\mathcal{B}}$ = base canonica di $\mathbb{R}^N$

$\left(\text{se } v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \iff v = c_1 \hat{e}_1 + \cdots + c_N \hat{e}_N \quad \circledast \right)$

Dunque se siamo in $\mathbb{R}^N$ e se $\{v_1 \cdots v_N\} = \mathcal{B}$ è una base

$$\Rightarrow \quad \Big[v_1 \Big| \cdots \Big| v_N \Big] = M_{\hat{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = M$$

(passaggio dalle coordinate in $\mathcal{B} \to$ coordinate canoniche)

Dunque $\boxed{M_{\mathcal{B}\hat{\mathcal{B}}} = \Big[v_1 \Big| \cdots \Big| v_N \Big]^{-1}}$

Più in generale

$$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \underbrace{M_{\mathcal{B}'\hat{\mathcal{B}}}}_{(M_{\hat{\mathcal{B}}\mathcal{B}'})^{-1}} M_{\hat{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = [v_1' | \cdots v_N']^{-1} [v_1 | \cdots | v_N]$$

Consideriamo A matrice $M \times N$. Alla matrice A corrisponde $L = L_A$ definita ($L_A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$) da

$$L v = A \cdot v$$

OVVIAMENTE $[L_A]_{\hat{\mathcal{B}}_M \hat{\mathcal{B}}_N} = A$

Prendo un'altra base $\mathcal{B}'$ in $\mathbb{R}^M$ e $\mathcal{B}$ in $\mathbb{R}^N$

Si vede che

$$\boxed{A_1 = [L_A]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\hat{\mathcal{B}}_M} A \, M_{\hat{\mathcal{B}}_N\mathcal{B}} = [v_1' \cdots v_M']^{-1} A \, [v_1 \cdots v_N]}$$

A_1 rappresenta A nelle basi $\mathcal{B}'$ (in arrivo) e $\mathcal{B}$ in partenza

---

<u>Def.</u> Data un'app lineare $L : X \to X$ chiamo autovettore / autovalore un vettore $e \neq 0$ / numero λ t.c.

$$L e = \lambda e$$

Stesso discorso se $X = \mathbb{R}^N$ A è una matrice $N \times N$.

Sappiamo che gli autovettori sono le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^N$ e trovo <u>N autovettori linearmente indipendenti</u> (per A) $e_1 \dots e_N \in \mathbb{R}^N$ (di autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_N$ - non necessariamente distinti). Allora $e_1 \dots e_N$ formano una base per $\mathbb{R}^N$ $\mathcal{B} = \{e_1 \dots e_N\}$

Se mi metto in $\mathcal{B}$ ho che

$$[L_A]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \underbrace{\mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N)}_{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Da quanto detto prima

$$D = M^{-1} A M$$ dove

$$M = [e_1 | \dots | e_N]$$ e cioè

$$\boxed{A = M D M^{-1}}$$

Applicazioni bilineari e forme quadratiche

Def. $\mathbb{X}$ spazio vettoriale $\quad a : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$

- Dico che a è "bilineare" se è lineare in ognuno dei suoi (due) argomenti:

$$a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) = \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v)$$
$$a(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 a(u, v_1) + \lambda_2 a(u, v_2)$$

- Dico che a è <u>simmetrica</u> se $\quad a(u,v) = a(v,u) \quad \forall u,v \in \mathbb{X}$

- Dico che a è <u>definita positiva</u> se

$$a(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0 \quad u \in \mathbb{X} \qquad (a > 0)$$

che a è non negativa se

$$a(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{X} \qquad (a \geq 0)$$

Fatto Se a è bilineare su X e $\mathcal{B}$ è una base per X
$\dim(X) = N$ " $\{v_1 \dots v_N\}$

allora esiste una matrice A $N \times N$ tale che

$$a(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^t A [v]_{\mathcal{B}}$$

CONVENZIONE: i vettori di $\mathbb{R}^N$ "sono" matrici $N \times 1$ (colonne)

Se $X = \mathbb{R}^N$ posso scrivere $a(u,v) = u^t A v$

Def. Sia $\phi : X \to \mathbb{R}$. Dico che ϕ è una <u>forma quadratica</u> se esiste a bilineare t.c.

$$\phi(u) = a(u,u) \quad (\star)$$

<u>N.B</u> Ne segue $\phi(tu) = a(tu,tu) = t^2 \phi(u)$

<u>OSS</u>. a non è univocamente determinata. Se a verifica $(\star)$ anche a^* definita da $a^*(u,v) = \dfrac{a(u,v)+a(v,u)}{2}$ verifica $(\star)$ e a^* è simmetrica.

DUNQUE una forma quadratica ϕ deriva sempre da una a simmetrica $\iff$

$\exists$ A simmetrica $(N \times N)$ tale che

$$\phi(u) = [u]_{\mathcal{B}}^t A [u]_{\mathcal{B}}$$

$$(\phi(u) = u^t A u \text{ se } X = \mathbb{R}^N)$$

Per esempio $\phi(x,y,z) = x^2 - 4xy + 2yz - 5z^2$

vedo (a occhio) che posso prendere come A la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} = A \quad (\text{verificare per credere} \ldots)$$

<u>Teorema spettrale</u> Se A è una matrice simmetrica

$\Rightarrow$ A ammette una base di autovettori $\{e_1 \ldots e_N\}$ (con autovalori reali - non necessariamente distinti)

INOLTRE $e_i \cdot e_j = 0$ se $i \neq j$ (base ortogonale)

(siamo su $\mathbb{R}^N$ → prodotto scalare canonico).

<u>Dunque:</u>

(a) Se ϕ è una forma quadratica esiste una base ortonormale $e_1 \ldots e_N$, $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\phi(u) = \lambda_1 u_1^2 + \cdots + \lambda_N u_N^2$$

. - dove u_i sono le coordinate di u rispetto a B

(Basta prendere e_i, λ_i gli autovettori / autovalori della matrice A detta sopra)

(b) $\phi \geq 0 \iff$ tutti i λ_i in (a) sono ≥ 0

$\phi(u) > 0$ se $u \neq 0 \iff \lambda_i > 0 \quad \forall i$

$\iff$ la a bilineare associata a ϕ è $> 0 / \geq 0$

VEDIAMO DOMANI UN CRITERIO PER STABILIRE SE UNA MATRICE A (l'app. bilineare associata) è ≥ 0 o > 0 Criterio di Sylvester