Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 01 30/09/19

(*) ricevimento il venerdì alle ore 15.00
presso Dip. Matematica (edificio ex Albergo, secondo piano)
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

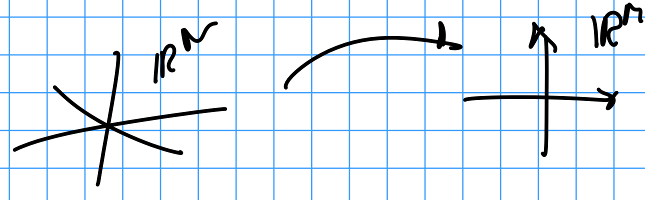
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ (di solito $N = 2, 3$)

Si studiano $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$

(anzi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^M$ con $D \subset \mathbb{R}^N$)

N variabili in partenza e

M variabili in arrivo



DI SOLITO $M = 1$ (in arrivo ho $\mathbb{R}$).

funzioni reali di $\boxed{N \text{ variabili reali}}$

Già in $\mathbb{R}^2$ c'è una grossa differenza rispetto a $\mathbb{R}$

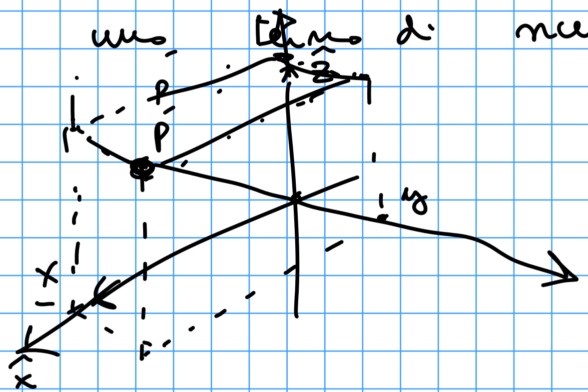
"La geometria è più complicata"

Riepilogo degli spazi $\mathbb{R}^n$

IDEA FONDAMENTALE:

PUNTI $\longrightarrow$ COORDINATE

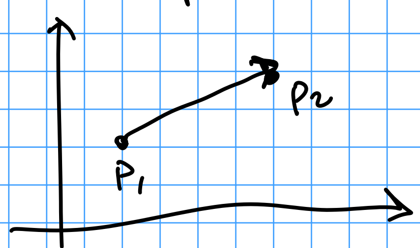
Fissato un sistema di riferimento (nello spazio) a ogni punto corrisponde una terna di numeri

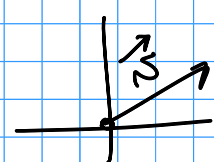


$$P \underset{\text{BIUNIVOCA}}{\longleftrightarrow} (x, y, z)$$

NOTA: Di solito si pensa alle coordinate come a dei "vettori" in $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ ... SI PUÒ CONVERTIRE

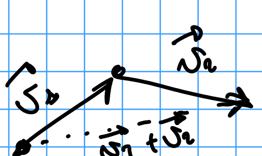
- Dati due punti P_1 e P_2 $\qquad \vec{v} = P_2 - P_1$ è un vettore





- e quindi $\quad P_1 + \vec{v} =$ PUNTO

Nell'ambito dei vettori (per es in $\mathbb{R}^3$) ho definito la somma mediante la regola del parallelogramma



SI VEDE FACILMENTE CHE

se $\vec{v}_1 = (v_{1,1} \dots v_{1,N})$

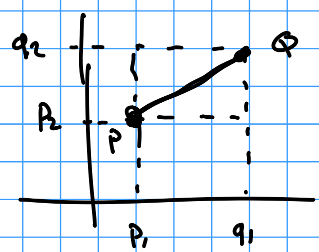
$\vec{v}_2 = (v_{2,1} \dots v_{2,N})$ $\Rightarrow$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1,1} + v_{2,1}, \dots, v_{1,N} + v_{2,N})$

• NOZIONE DI DISTANZA TRA PUNTI (distanza euclidea)

<u>Def.</u> Se $P = (p_1 \cdots p_N)$ $Q = (q_1 \cdots q_N)$

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2 + \cdots + (p_N-q_N)^2}$$



se $N = 2$ $\quad \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$

(teorema di pitagora)

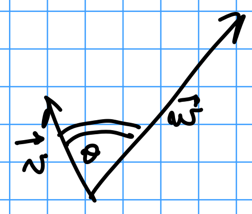
• Se prendo la distanza da O (origine) di un punto P ho la "NORMA" DI P $\quad \|P\| = \sqrt{p_1^2 + \cdots + p_N^2}$

<u>PRODOTTO SCALARE</u>

IN $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$

definisco $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos(\theta)$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$



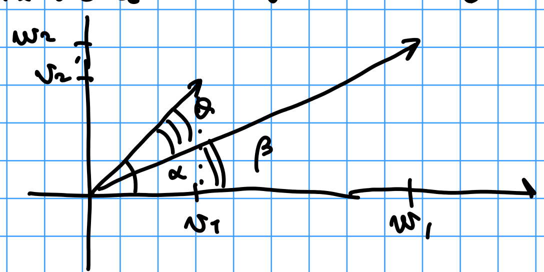
($\vec{v} \cdot \vec{w}$ è un numero reale)

<u>FATTO</u> Dati $\vec{v}$ e $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ di coordinate (v_1, v_2, v_3) (w_1, w_2, w_3)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

(sarebbe interessante: se cambio sistema di rif → cambio le coordinate ma la formula continua a valere)

Vediamo la dim. in dimensione 2



So che
$v_1 = \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$
$v_2 = \|\vec{v}\| \sin(\alpha)$
$w_1 = \|\vec{w}\| \cos(\beta)$
$w_2 = \|\vec{w}\| \sin(\beta)$

$\theta = \alpha - \beta \qquad \cos\theta = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos(\theta) = \|\vec{v}\| \cos(\alpha) \|\vec{w}\| \cos(\beta) + \|\vec{v}\| \sin\alpha \, \|\vec{w}\| \sin\beta$$
$$= v_1 w_1 + v_2 w_2$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

$\vec{v}, \vec{w} \longmapsto \vec{v}\cdot\vec{w}$ è una funzione definita

su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$ tale che

- (simmetrico) $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$
- (bilineare) $(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2)\cdot\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1\cdot\vec{w} + \lambda_2 \vec{v}_2\cdot\vec{w}$
  $\vec{v}\cdot(\mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2) = \mu_1 \vec{v}\cdot\vec{w}_1 + \mu_2 \vec{v}\cdot\vec{w}_2$
- $\vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$ e fa zero se e solo se $\vec{v} = \vec{0}$

IN EFFETTI $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

IN GENERALE CHIAMEREMO PRODOTTO SCALARE una generica funzione $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con le proprietà sopra

- Data una tale φ posso chiamare "norma" associata ad φ
  $\|\vec{v}\|_\varphi = \sqrt{\varphi(\vec{v},\vec{v})}$

Quello detto prima è il "Prodotto scalare canonico"

<u>OSS.</u> Se in $\mathbb{R}^n$ c'è un prodotto scalare, risulta definito l'angolo tra due vettori dalla relazione

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|\cos(\theta)$$

Se $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ dico che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono <u>ORTOGONALI</u>

<u>Esempio</u> Prendiamo $\vec{v} = (2, 1, -2)$ $\vec{w} = (1, 1, 0)$

Che angolo formano $\vec{v}$ e $\vec{w}$?!

Dalle formule:

$\|v\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$\|w\| = \sqrt{2}$

$v \cdot w = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 3$

$3 = |v| \cdot |w| \cos\theta \iff 3 = 3 \cdot \sqrt{2} \cos\theta \iff \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

Ricordiamo un po' di teoria degli spazi vettoriali

Def. Chiamo spazio vettoriale un insieme X su cui sono definite le seguenti operazioni

- SOMMA $\quad v, w \in X \to v + w \in X$

  (con le solite proprietà della somma)

- Prodotto ho $v \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

  $v \in X, \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \lambda \cdot v \in X$

  (proprietà solite)

Def. Se $v_1 .. v_k \in X$ dico che $v_1 .. v_k$ sono linearmente indipendenti se per ogni k-pla $\lambda_1 .. \lambda_k \in \mathbb{R}$ con $\underbrace{\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_k v_k}_{\text{combinazione lineare}} = 0$ si HA $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

Fatto Se $v_1 .. v_k$ sono lin. ind. e se v è combinazione lineare di $v_1 .. v_k$ $\Rightarrow$

ESISTE UNICA $(\lambda_1, .., \lambda_k)$ con $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_k v_k$

Def. Dato X spazio vettoriale dico che $v_1 .. v_N$ è una BASE per X se

- $v_1 .. v_N$ sono lin. indip
- $\forall\, v \in X \quad \exists\, \lambda_1 .. \lambda_N$ con $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_N v_N$

FATTO Se $v_1 \dots v_N$ e $w_1 \dots w_M$ sono due basi $\Rightarrow N = M$

Il numero N si chiama "DIMENSIONE DI $\mathbb{X}$" $= \dim(\mathbb{X})$

(oss ci sono spazi $\mathbb{X}$ che non hanno una base fatta da un numero finito di elementi. Allora $\dim(\mathbb{X}) = +\infty$)

Fatto Se $\mathbb{X}$ ha dimensione N. Fissiamo una base $v_1 \dots v_N$. Allora c'è una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{X}$ e $\mathbb{R}^N$ fatta nel seguente modo:

$$v \in \mathbb{X} \Rightarrow \exists \text{ unici } c_1 \dots c_N \text{ tali che}$$
$$v = c_1 v_1 + \dots + c_N v_N$$

Quindi associo a $v \in \mathbb{X}$ la N-pla $(c_1 \dots c_N) \in \mathbb{R}^N$

Questi $c_1 \dots c_N$ si chiamano "coordinate" di v rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_N\}$ e indico

$$(c_1 \dots c_N) = [v]_{\mathcal{B}}$$

Def. Dati due spazi vettoriali $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}'$ e data una funzione $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ dico che L è lineare se

$$L(\underbrace{\lambda v + \mu w}_{\in \mathbb{X}}) = \underbrace{\lambda L v + \mu L w}_{\in \mathbb{X}'} \qquad \forall v, w \in \mathbb{X} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Oss. La mappa $v \to [v]_{\mathcal{B}}$ è lineare ed è bigettiva

Def. Una matrice $N \times M$ (con N righe e M colonne) è una "tabella"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NM} \end{pmatrix}$$

Per le matrici è definito il prodotto "righe x colonne"

$$A \cdot B = C \qquad \begin{matrix} A & N \times M \\ B & M \times L \end{matrix} \implies C \text{ è } N \times L$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{M} a_{ik} b_{kj}$$

<u>Fatto</u> Siano $\mathbb{X}$ di dim. N $\mathbb{X}'$ di dim M
e siano $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_N\}$ $\mathcal{B}' = \{v'_1 .. v'_M\}$
delle basi in $\mathbb{X}$ e in $\mathbb{X}'$. Per ogni $L : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$
lineare considero la matrice A $M \times N$ tale che

$$A = \left[A^1 \; .. \; A^N \right] \qquad A^i \in \mathbb{R}^M \text{ sono le colonne di } A$$

$$A^i = [L v_i]_{\mathcal{B}'}$$

La matrice A ha la proprietà che

$$\forall v \in \mathbb{X} \qquad [Lv]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

In questo senso A rappresenta l'applicazione L rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ (L'applicazione di L a v si traduce nel prodotto $A \cdot [v]_{\mathcal{B}}$)

USO LA NOTAZIONE $A = [L]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

<u>CASO SPECIALE</u> $\mathbb{X}' = \mathbb{X}$ $L = I$ (identità: $Iv = v$)

$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} := [I]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ e se la applico a $[v]_{\mathcal{B}}$ ottengo $[v]_{\mathcal{B}'}$

$M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ rappresenta il cambio di base tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$

Supponiamo che $\mathbb{X} = \mathbb{X}' = \mathbb{R}^N$ e consideriamo $\mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}}$ la base canonica $\hat{e}_1 = (1, 0 .. 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1, 0 ..)$, ..., $\hat{e}_N = (0 .. 1)$

e suppongo che $\mathcal{B}' = (w_1 \dots w_N)$ un'altra base di $\mathbb{R}^N$

Se considero $M = \left[w_1 \,|\, w_2 \,|\, \dots \,|\, w_N \right]$

(metto i vettori in colonna) Per quanto detto prima

$M = M_{\hat{\mathcal{B}}\mathcal{B}'}$ mi dà il cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\hat{\mathcal{B}}$

Si vede facilmente che $[I]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = [I]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

$\Rightarrow$ Il cambio di base dalla base canonica $\hat{\mathcal{B}}$ a una base generica $\mathcal{B}' = (w_1 \dots w_N)$ è dato dalla matrice inversa

$$M_{\mathcal{B}'\hat{\mathcal{B}}} = \left[w_1 \,|\, w_2 \,|\, \dots \,|\, w_N \right]^{-1}$$

Da questo è abbastanza facile vedere che, date due basi $\underset{\{v_i\}}{\mathcal{B}}$ e $\underset{\{w_j\}}{\mathcal{B}'}$ in $\mathbb{R}^N$ $\Rightarrow$ il cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'\hat{\mathcal{B}}}\, M_{\hat{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = \left[w_1 | \; | w_N \right]^{-1} \left[v_1 | \dots | v_N \right]^{-1}$$

<u>Oss.</u> Se in X c'è un prodotto scalare $(v, w) \to v \cdot w$

Allora vale:

(a) Se $v_1 \dots v_N$ sono ortogonali: $v_i \cdot v_j = 0$ per $i \neq j$

$\Rightarrow$ $v_1 \dots v_N$ sono lin. indip.

<u>Dim</u> Suppongo $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_N v_N = 0$ $(*)$

Prendo un qualunque indice $j = 1 \dots N$ e moltiplico scalarmente $(*)$ per v_j

$$\lambda_1 \underbrace{v_1 \cdot v_j}_{=0} + \dots \lambda_j v_j \cdot v_j + \dots + \lambda_N \underbrace{v_N v_j}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_j \|v_j\|^2 = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_j = 0$ $(\forall j)$

(b) Supponiamo che $v_1 \dots v_N$ sia una base di vettori ortogonali e tali che $\|v_j\| = 1$

(base ortonormale) ALLORA

$\forall v \in \mathbb{X}$ $v = c_1 v_1 + \cdots + c_N v_N$ $(\star)$

dove $c_j = v \cdot v_j$

Infatti se moltiplico $(\star)$ per v_j trovo il risultato