Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 65 28/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

TROVARE LA FORMA DI JORDAN DI A: $(N \times N)$

- trovare il pol. caratteristico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, le radici di p (GLI AUTOVALORI DI A) e le molteplicità.

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ $\quad (m_1 + \cdots + m_k = N)$

m_i = molteplicità algebrica di λ_i

- Per ogni $\lambda = \lambda_i$ $\quad m_i = m_A(\lambda_i)$ trovo

$\Rightarrow B = A - \lambda_i$ $\quad (\ker(B) = \mathrm{span}(e_1 \dots e_q)$ e_i autovettori)

$m_G = \dim(\ker(B)) > 0$

(autospazio relativo a λ)

- $m_1 = m_G = \dim \ker B$

$m_2 = \dim \ker B^2$

$\vdots$

$m_k = \dim \ker B^k$ $\quad \ker B^i \subset \ker B^{i+1} \Rightarrow$

SI HA CHE $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k \dots$

Prendiamo l'intero $\bar{k}$: $m_{\bar{k}-1} < m_{\bar{k}} = m_{\bar{k}+1}$

(il primo k per cui $\ker B^k = \ker B^{k+1}$) . SI HA $m_k \leq m_A$

Inoltre $\forall i$ $\underbrace{m_{i+1} - m_i}_{} \leq \underbrace{m_i - m_{i-1}}_{}$

CON QUESTI NUMERI POSSIAMO SCRIVERE LA MATRICE J

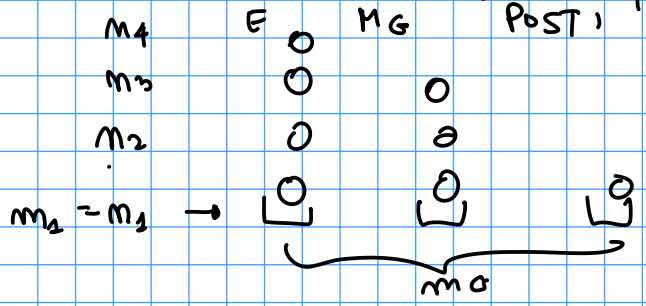
$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$ OGNI BLOCCO $J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

CI SONO TANTI BLOCCHI CON $\lambda = \lambda_i$ QUANTA È $m_G(\lambda_i)$

(quanti sono gli autovalori lin. indip.)

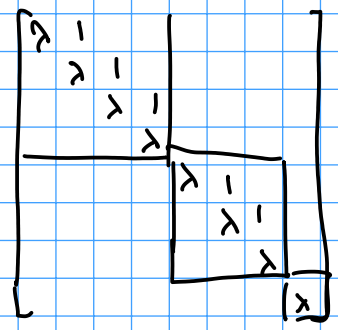
. QUAL È LA DIMENSIONE DEGLI m_G BLOCCHI RELATIVI A λ ?!

IMMAGINATE DI AVERE m_A GETTONI (to E m_G "POSTI")



$m_G = 3$
$m_A = 8$

$\hookrightarrow$ $J =$



$m_1 = 3$
$m_2 = 5$
$m_3 = 7$
$m_4 = 8$
$m_5 = 9$
⋮

$m_1 = 3$
$m_2 = 2$
$m_3 = 2$
$m_4 = 1$

A OGNI CONFIGURAZIONE DI QUESTO TIPO CORRISPONDE

una sequenza $m_1 < m_2 < \dots < m_k = m_{k+1}$ oppure

$m_1 \geq m_2 \geq \dots m_k \geq 1 \quad m_{k+1} = 0$

dove $m_1 = m_1$, $m_2 = m_1 - m_2$ . . .

ALLA CONFIGURAZIONE NELL'ESEMPIO CORRISPONDE

NELLA FIGURA i GETTONI CORRISPONDONO A DEI VETTORI

e in modo che se e si trova all'altezza i

$\Rightarrow$ $e \in \operatorname{Ker} B^i$ $\quad e \notin \operatorname{Ker} B^{i-1}$

($\Rightarrow$ se $i > 1$ $\quad Be \neq 0$ $\quad Be \in \operatorname{Ker} B^{i-1}$). Posso scegliere

questo e in modo che

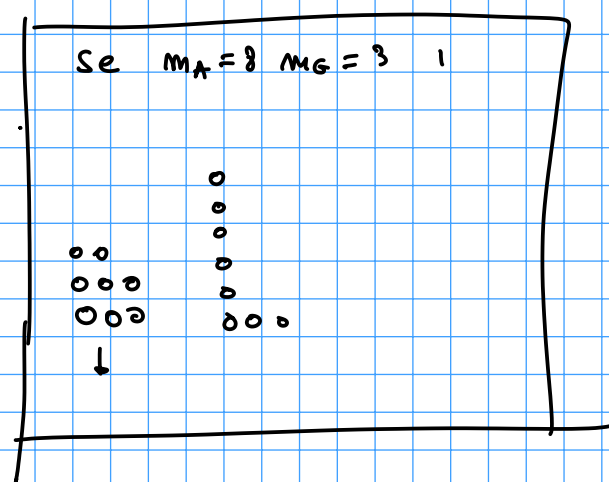
$$\begin{array}{ccccc}
4 & e_8 & & & \\
 & \downarrow B & & & \\
3 & e_7 & e_6 & & \\
 & \downarrow B & \downarrow B & & \\
2 & e_5 & e_4 & & \\
 & \downarrow B & \downarrow B & & \\
1 & e_3 & e_2 & e_1 &
\end{array}$$

$B^3 e_7 = 0 \quad B^6 e_6 = 0$ MA $B^2 e_7 \neq 0 \quad B^2 e_6 \neq 0$

$e_7 = B e_8$

$e_5 = B e_7$ . . .

$e_3 = B e_5$



MI BASTA TROVARE e_8 e_6 e_1

VEDIAMO UN ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -18 & -7 \\ 1 & -13 & -4 \\ -1 & 25 & 8 \end{bmatrix}$$

$p(\lambda) = -(\lambda+2)^3$ (FIDIAMOCI)

$\lambda_1 = \lambda = \boxed{-2}$ $\quad \boxed{m_A = 3}$

$B = A + 2I$ $\leftarrow$ HA DET. ZERO

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -18 & -7 \\ 1 & -11 & -4 \\ -1 & 25 & 10 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ DIM KER ??

$\left(\begin{array}{lll} \dim = 1 & \text{rango} & = 2 \\ \dim = 2 & \text{rango} & = 1 \\ \dim = 3 & B = 0 & \text{NO} \end{array} \right)$

RANGO $= 2$ $\quad$ det $\neq 0$ $\quad \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} B) = 1$ $\quad \Leftarrow m_G = 1$

$$\begin{array}{c} e_3 \\ \downarrow B \\ e_2 \\ \downarrow B \\ e_1 \\ \downarrow B \\ 0 \end{array}$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

VOGLIO TROVARE e_1 e_2 e_3 (MI SERVONO ...)

DEVO PARTIRE DA e_3 RICORDANDO CHE $\underbrace{B^3 e_3 = 0}_{\text{OVVIA}}$, $B^2 e_3 \neq 0$

DEVO ALLORA CALCOLARE B^2:

$$B^2 = \begin{bmatrix} -10 & 5 & -5 \\ -6 & 3 & -3 \\ 14 & -7 & 7 \end{bmatrix} \qquad (\text{rango } 1)$$

Cerco (o così) un vettore e_3 con $B^2 e_3 \neq 0$ per esempio

$$e_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B^2 e_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \neq 0 \quad = e_1 \leftarrow \text{autovettore}$$

$$B e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = e_2$$

ALLORA FABBRICO $M = (e_1\ e_2\ e_3) = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 14 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{A = M J M^{-1}}$$

(in effetti M manda $\hat{e}_i \to e_i$ ($\hat{e}_i$ vettori base canonica)
M^{-1} manda $e_i \to \hat{e}_i$

$J \hat{e}_i = \lambda \hat{e}_i + \hat{e}_{i-1} \Rightarrow$

$A e_i = \lambda e_i + e_{i-1}$)

ALTRO ESEMPIO

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -12 & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 37 & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -17 \end{bmatrix}$$

$P(\lambda) = (\lambda - 3)^4$ (UN SOLO AUTOV)

$$B = A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -15 & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 34 & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -20 \end{bmatrix}$$

← $\det \neq 0$

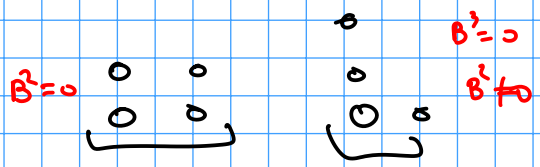
RANGO 2

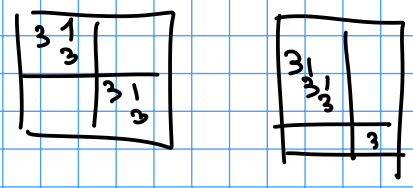
(PIDIAMOCI)

$\Downarrow$ $\dim(\ker B) = 2$

$m_G = 2 \Rightarrow$ DUE CASI

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$





FACENDO I CONTI VEDO CHE

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad (B^3 = 0)$$

SONO NEL SECONDO CASO

$$\Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Per trovare M devo dire

$e_4 : B^2 e_4 \neq 0$

posso prendere $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2 e_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} =: e_2$

$$e_3 := B e_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$e_4 \xrightarrow{B} e_3 \xrightarrow{B} e_2$?!? e_1

MI MANCA e_1 e_1 lo devo scegliere

che e_2 e e_3 siano una base di $\ker B$

DEVO TROVARE $\ker(B)$

$$BX = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -11 & 11 & 6 \\ 3 & -15 & -42 & 42 & 0 \\ -2 & 12 & 34 & -34 & 0 \\ -1 & 7 & 20 & -20 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow_{\text{(FIDIAMOCI)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker B = \{ x + z - w = 0 \,,\; y + 3z - 3w = 0 \}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker B \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ SONO LIN. IND.

$1 - 2 + 1 = 0$

$3 - 6 + 3 = 0$

TORNA

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \right) \rightarrow J = \left(\begin{array}{c|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \qquad A = M^{-1} J M$$

se invece $M = \left(\begin{array}{ccc|c} e_2 & e_3 & e_4 & e_1 \end{array} \right) \rightarrow J = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \\ \hline & 0 & & 3 \end{array} \right)$ $\qquad A = M^{-1} J M$

TORNANDO AI SISTEMI DI EQ. DIFF.

MI RIMANE DA CALCOLARE e^{tJ} CON J nella forma di Jordan

BASTA TROVARE e^{tJ} se J è un <u>blocco di Jordan</u> perché

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix} \Rightarrow e^J = \begin{pmatrix} e^{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_k} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + B \quad \text{dove} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = B_1$$

(di dimensione n)

$$B^2 = B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

È FACILE DA VERIFICARE

per es. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ ... $B^n = 0$

λI e B ovviamente commutano tra loro $\Rightarrow$

$$e^J = e^{\lambda I + B} = e^{\lambda I} \cdot e^B = \mathrm{Diag}(\lambda \cdots \lambda) \cdot e^B$$

$$e^{tB} = I + tB + \frac{t^2}{2} B^2 + \cdots \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} B^n + 0 \qquad \text{cioè}$$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & t^2/2 & \\ & & 1 & t & t^2/2 \\ & & & 1 & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = .$$

$$e^{tJ} = e^{t\lambda} e^{tB}$$

$$\left(e^{tD} = \mathrm{Diag}(e^{t\lambda} \cdots e^{t\lambda}) = e^{t\lambda} I \right)$$

ESEMPIO PRENDIAMO IL SISTEMA

$Y' = AY$ dove A è la matrice del primo esempio. cioè

$$\left(Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \begin{cases} x' = -x - 13y - 7z \\ y' = x - 13y - 4z \\ z' = -x + 25y + 8z \end{cases}$$

con cond. iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ $\quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Y(t) = e^{tA} Y_0$ $\qquad A = M J M^{-1}$ dove

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 14 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$Y(t) = M^{-1} e^{tJ} M Y_0 = e^{-2t} M e^{tB} M^{-1} Y_0 =$$

$$e^{-2t}\, M \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} Y_0 = \circledast$$

NOTIAMO (CASO FORTUNATO) CHE $Y_0 = e_3$ $\Rightarrow$

SO CHE $M \hat{e}_3 = e_3$ $\Rightarrow$

$$M^{-1} e_3 = \hat{e}_3 \quad ?!$$

$$\circledast = e^{-2t} M \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} M \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 14 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -5t^2 + t + 1 \\ -3t^2 + t \\ 7t^2 - t \end{pmatrix}$$

cioè

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t}(-5t^2 + t + 1) \\ y(t) &= e^{-2t}(-3t^2 + t) \\ z(t) &= e^{-2t}(7t^2 - t) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 1 \end{aligned}$$

VERIFICA LE COND. INIZ.

$$x'(t) = -2e^{-2t}(-5t^2 + t + 1) + e^{-2t}(-10t + 1) = e^{-2t}(10t^2 - 12t - 1)$$

$$y'(t) = -2e^{-2t}(-3t^2 + t) + e^{-2t}(-6t + 1) = e^{-2t}(6t^2 - 8t + 1)$$

$$z'(t) = -2e^{-2t}(7t^2 - t) + e^{-2t}(14t - 1) = e^{-2t}(-14t^2 + 16t - 1)$$

$$-x - 10y - 7z = e^{-2t}(5t^2 - t - 1 + 54t^2 - 18t - 49t^2 + 7t) =$$

$$e^{-2t}(10t^2 - 12t - 1) = x'(t) \;!!$$

$$+x - 13y - 4z = e^{-2t}(-5t^2 + t + 1 + 39t^2 - 13t - 28t^2 + 4t) =$$

$$e^{-2t}(6t^2 - 8t + 1) = y'(t) \;!!$$

$$-x + 25y + 8z = e^{-2t}(+5t^2 - t - 1 - 75t^2 + 25t + 56t^2 - 8t) =$$

$$e^{-2t}(14t^2 + 16t - 1) = z'(t) \;!!$$