Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 64 23/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Per risolvere il sistema $\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ (A matrice $N \times N$, $Y(t) \in \mathbb{R}^N$)

mi serve l'esponenziale e^{tA} dove

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}$$

$$\left(\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \Rightarrow Y(t) = e^{tA} Y_0 \right)$$

FATTI: ① Se $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \Rightarrow e^{tA} = \mathrm{Diag}\left(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_N}\right)$

② & $A = M^{-1} A_1 M \Rightarrow e^{tA} = M^{-1} e^{tA_1} M$

③ DUNQUE se A è diagonalizzabile, cioè se $A = M^{-1} \mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_N) M \Rightarrow$

$$e^{tA} = M^{-1} \mathrm{Diag}\left(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_N}\right) M$$

LO POSSO SICURAMENTE FARE SE A è simmetrica

CHE COSA SI FA NEL CASO GENERALE ($\rightarrow$ FORMA DI JORDAN)

JORDAN Prendo A matrice $N \times N$; $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$P(\lambda)$ ha sempre N radici (contate con la molteplicità) in $\mathbb{C}$

cioè $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_K - \lambda)^{m_K}$ $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $m_1 + \dots + m_K = N$

- λ_i sono gli autovalori $\quad m_i$ = molteplicità ALGEBRICA di λ_i

CASO FORTUNATO $\quad \forall \lambda_i$ ci sono m_i autovettori linearmente indip.

$\Leftrightarrow$ molteplicità GEOM di λ_i $= \dim \underbrace{\ker(A-\lambda_i I)}_{\text{spazio degli autovettori}} = m_i \qquad (m_G(\lambda_i) = m_A(\lambda_i))$

ALLORA C'È UNA BASE DI $\mathbb{R}^N$ FATTA DI AUTOVETTORI

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile: $A = M^{-1}\,\mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_N}_{\text{eventualmente ripetuti}})\,M$

e $M = (e_1\ e_2\ \ldots\ e_N)$ ho come colonne gli autovettori

(ANCHE SE A non è simmetrica) TUTTO QUESTO IN $\mathbb{C}$

se $\forall i\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ allora tutto vale in $\mathbb{R}$.

IN GENERALE NON SI PUÒ DIAGONALIZZARE A.

CONSIDERIAMO IL CASO $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$ $\quad (m_G(\lambda_i) \le m_A(\lambda_i))$

Def. Dico che e è un <u>autovettore generalizzato</u> per A di autovalore λ se

$e \in \ker(A-\lambda I)^m$ per m intero

Se $m=1$ ho che e è un autovalore.

<u>VEDREMO</u> che è sempre possibile trovare una base di autovettori generalizzati e che questo comporta che

$A = M^{-1} J M$ dove è una matrice triangolare

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \boxed{J_3} & \\ & & & \boxed{J_K} \end{pmatrix}$$

dove ogni $J_K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \ldots$

COSA DEVO FARE PER TROVARE QUESTA FORMA ??

- FISSO UN AUTOVALORE λ (uno dei λ_i) di molt. algebrica m_A
- Chiamo $B = (A - \lambda I)$

Chiamo $m_i = \dim(\ker B^i)$. È chiaro che

$$\{0\} \neq \ker B \subset \ker B^2 \subset \ker B^3 \subset \dots \subset \ker B^k \subset \ker B^{k+1} \subset \mathbb{R}^N$$

e dunque $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \dots \leq m^k$

Dato che questi spazi non possono ingrandirsi a dismisura esiste $k \geq 1$ tale che $\ker B^k = \ker B^{k+1}$ cioè $m_k = m_{k+1}$ e allora $\ker B^k = \ker B^h \ \forall h \geq k$ ($m_k = m_h \ \forall h \geq k$)

Prendiamo $\bar{k}$ tale che $m_{\bar{k}-1} < m_{\bar{k}} = m_{\bar{k}+1}$ (ie primo k tale che $m_k = m_{k+1}$) si dimostra che $k \leq m_A(\lambda)$ e $m_k = N$.

Si dimostra inoltre che $m_{i+1} - m_i \geq m_{i+2} - m_{i+1}$

cioè $m_i = \sum_{j=1}^{i} \delta_j$ con $\delta_j \in \mathbb{N}$, δ_j decrescente $\delta_{\bar{k}+1} = 0$.

- TROVATI i numeri m_i si dimostra che esistono:
- δ_k vettori $e_{k,1} \dots e_{k,\delta_k}$ lin. indip. tali che $B^{m_k} e = 0$ $B^{m_k - 1} e \neq 0$
- δ_{k-1} ($\geq \delta_k$) vett. $e_{k-1,1} \dots e_{k-1,\delta_{k-1}}$ lin. indip. t.c. $B^{m_{k-1}} e = 0$ $B^{m_{k-2}} e \neq 0$
- $\vdots$
- δ_1 ($\geq \delta_2$) vett. $e_{1,1} \dots e_{1,\delta_1}$ lin. indip t.c. $Be = 0$ (autov.)

A OGNI PASSO applicando B agli $e_{h,i}$ trovo degli elementi nello spazio soprastante

ESEMPIO $\Rightarrow$ con $N = 12$, $m_G = 5$, $m_A = 12$

e_{12} e_{11} $\delta_4 = 2$

e_{10} e_9 $\delta_3 = 2$

e_8 e_7 e_6 $\delta_2 = 3$

e_5 e_4 e_3 e_2 e_1 $\delta_1 = 5 = m_G(\lambda)$

① ② ③ ④ ⑤

$m_1 = 5$ $m_2 = 8$ $m_3 = 10$ $m_4 = 12 = N = m_A(\lambda)$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \\ & & & & 1 & \lambda \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

(① ② ③ ④ ⑤)

ESEMPIO A matrice 4×4 con un solo autovalore λ

Pongo $B=(A-\lambda I)$ e calcolo le potenze di B. So che $\ker B^4=\mathbb{R}^4$

$(\bar{k}=4)$:

Primo caso $\forall\ m_1<m_2<m_3<m_4=4=m_5=\dots$ dunque $\boxed{m_G=1}$

$\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=1$. Allora esiste $e_4\in\mathbb{R}^4$ tale che $B^3e_4\neq 0$ ($e\ B^4e_4=0$) Se pongo

$0\neq e_3=Be_4\in \ker B^3\setminus \ker B^2$
$0\neq e_2=B^2e_4\in \ker B^2\setminus \ker B$
$0\neq e_1=B^3e_4\in \ker B$

$\Rightarrow$ $e_1\ e_2\ e_3\ e_4$ sono lin. indi e generano $\mathbb{R}^2$

$e_4 \xrightarrow{B} e_3 \xrightarrow{B} e_2 \xrightarrow{B} e_1$

e si ha $Ae_4=\lambda e_4+e_3$, $Ae_3=\lambda e_3+e_2$, $Ae_2=\lambda e_2+e_1$, $Ae_1=\lambda e_1$

e dunque nella base degli e_i A diventa $\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$

Secondo caso $\bar{k}=3$: $1\le m_1\le m_2\le m_3=4=m_4=\dots$

L'UNICO MODO DI TROVARE $\delta_1\ge\delta_2\ge\delta_3$ è

$\delta_1=2$, $\delta_2=1$, $\delta_3=1$ (se $\delta_2>1$ alla fine la dimensione sarebbe >4)

$\boxed{m_G=2}$

Allora si trova e_4 tale che $B^3e_4=0$ $B^2e_4\neq 0$ e si possono definire $e_3=Be_4$ $e_2=B^2e_4$. Infine dato che $\dim(\ker B)=2$ si trova $e_1\in\ker B$ indipendente da e_2.

$e_4 \to e_3 \to e_2$, e_1

Nella base degli e_i la A diventa

$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$

Terzo Caso $\bar{k}=2$: $1\le m_1\le m_2=4=m_3=\dots$ Qui ci sono DUE MODI DI ASSEGNARE i δ_i:

(a) $\delta_1=2$, $\delta_2=2$ $m_G=2$ OPPURE (b) $\delta_1=3$, $\delta_2=1$ $m_G=3$

CASO (a) Ci sono e_3, e_4 indipendenti in $\ker B^2\setminus\ker B$

e posso definire $e_2=Be_3$, $e_1=Be_4$

$e_3 \to e_2$, $e_4 \to e_1$ $\Rightarrow$ LA MATRICE DIVENTA $\begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$

caso (b) Trovo un vb e_4 con $B^2 e_4 = 0$ $B e_4 \neq 0$

Definisco $e_3 = B e_4$ e trovo altri due autovalori e_2 e_1 con

e_1 e_2 e_3 indipendenti

e_4
↓
e_3, e_2, e_1

LA matrice si scrive $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Quarto caso $K=1$ $m_1 = 4$ $\Rightarrow$ si trovano 4 autovalori indipendenti $m_G = 4$ e

lo matrice diventa $\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & 0 & \\ & 0 & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

VENERDÌ MATTINA
LEZIONE DI
RECUPERO (alle 9.30)

e_4
B ↓
e_3 e_2 e_1

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \\ & \lambda & 1 & \\ 0 & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

CI RIPENSIAMO LA PROSSIMA VOLTA