Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale
Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 63 22/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

SISTEMI DI EQ. DIFF. LINEARI. CONSIDERIAMO

$$(L)\begin{cases} Y' = A(x)Y + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

dove $A: I \to M(N\times N)$ (matrici $N\times N$) e $B: I \to \mathbb{R}^N$ sono continue e dove I è un intervallo (con parte interna $\neq\emptyset$!); inoltre $x_0 \in I$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ (i DATI INIZIALI)

Teorema Dati $x_0 \in I$ e $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ esiste unica $Y: I \to \mathbb{R}^N$ soluzione di (L): questo significa che Y è C^1 su I, che $Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$ $\forall x \in I$ e che $Y(x_0) = Y_0$.

Dim (cenno) Se consideriamo $F(x,Y) := A(x)Y + B(x)$ vediamo che $F: \underbrace{I\times\mathbb{R}^N}_{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è continua e che, dato $[a,b] \subset I$ si ha

$$x\in[a,b],\ Y_1, Y_2 \in \mathbb{R}^N \Rightarrow \|F(x,Y_1) - F(x,Y_2)\| = \|A(x)(Y_1-Y_2)\| \le \|A(x)\|\,\|Y_1-Y_2\|$$

$$\le \max_{a\le x\le b}\|A(x)\|\,\|Y_1-Y_2\| = M\cdot\|Y_1-Y_2\|$$

Dunque (vedi) F verifica le ipotesi del teorema di Cauchy su $]a,b[\times\mathbb{R}^M$ $\Rightarrow$

questa base ed avere esistenza locale ($Y:]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\to \mathbb{R}^N$ soluzione).
CON OPPORTUNE STIME (non fatte) si vede che $Y(x)$ si può estendere a tutto I (usando il teorema sull'esistenza massimale e la linearità in Y). #

STRUTTURA DELLE SOLUZIONI

Conveniamo di chiamare sistema omogeneo il problema

$$(L.O) \qquad Y' = A(x)Y$$

e indichiamo $\mathcal{S} = \{ Y: I \to \mathbb{R}^N \text{ soluzioni di } Y' = A(x)Y + B(x) \}$

$\mathcal{S}_0 = \{ Y: I \to \mathbb{R}^N \text{ soluzioni di } (L.O) \}$

Prop. Si ha:

(a) Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S}_0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 Y_1 + c_2 Y_2 \in \mathcal{S}_0$ ($\mathcal{S}_0$ è uno spazio lineare)

(b1) Se $Y \in \mathcal{S}$, $Y_0 \in \mathcal{S}_0 \Rightarrow Y + Y_0 \in \mathcal{S}$

(b2) Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow Y_1 - Y_2 \in \mathcal{S}_0$

} Facili conseguenze della linearità

(c) $\mathcal{S}_0$ ha dimensione N. In altri termini $\exists\, Y_1 \cdots Y_N \in \mathcal{S}_0$ tali che

(i) $Y_1 \cdots Y_N$ sono linearmente indipendenti

(ii) $Y_1 \cdots Y_N$ generano $\mathcal{S}_0$

Dim. di (c). Siano $\hat{e}_1 \cdots \hat{e}_N$ gli N vettori della base di $\mathbb{R}^N$: $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$, $\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots$
Sia $x_0 \in I$.

Indichiamo con Y_i = soluzione di $Y' = A(x)Y$ con $Y_i(x_0) = \hat{e}_i$.

Dico che $Y_1 \cdots Y_N$ verificano (i) e (ii). Infatti

(i) Se $c_1 \cdots c_N \in \mathbb{R}$ e $c_1 Y_1(x) + \cdots + c_N Y_N(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow$

$c_1 Y_1(x_0) + \cdots + c_N Y_N(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 \hat{e}_1 + \cdots + c_N \hat{e}_N = 0$

Dato che gli $\hat{e}_i$ sono lin. indip. $\Rightarrow c_1 = \cdots = c_N = 0$

(ii) Sia Y una soluzione di $(L.O)$. Dato che $\hat{e}_1 \cdots \hat{e}_N$ è una base in $\mathbb{R}^N$ esistono $c_1 \cdots c_N$ tali che $Y(x_0) = c_1 \hat{e}_1 + \cdots + c_N \hat{e}_N$. Poniamo

$\tilde{Y}(x) := c_1 Y_1(x) + \cdots + c_N Y_N(x)$.

È chiaro che $\tilde{Y}$ è una sol. di $(L.O)$, cioè $\tilde{Y} \in \mathcal{S}_0$, per la linearità di $\mathcal{S}_0$.

Inoltre $\tilde{Y}(x_0) = c_1 \tilde{Y}_1(x_0) + \dots + c_N \tilde{Y}_N(x_0) = c_1 \hat{e}_1 + \dots + c_N \hat{e}_N = Y(0)$.

Dunque $\tilde{Y}$ è una sol. di (L_0) che ha lo stesso punto iniziale della sol. Y

PER L'UNICITÀ $\Rightarrow Y = \tilde{Y} = c_1 Y_1 + \dots + c_N Y_N$ (Y è combin. lin. delle Y_i).

IN SOSTANZA PER TROVARE TUTTE LE SOL. DI (L) dobbiamo

- Trovare una sol. (particolare) $\bar{Y}$ di (L)
- Trovare N soluzioni Y_i di (L_0) linearmente indipendenti

Se ci riusciamo ci ha che

Y è sol. di $(L) \iff Y = \bar{Y} + c_1 Y_1 + \dots + c_N Y_N$ per opportuni $c_1 \dots c_N \in \mathbb{R}$

IN GENERALE QUESTO NON SI SA FARE IN MODO ESPLICITO CONSIDERO ORA IL CASO A INDIPENDENTE DA x matrici $N \times N$

Def. Se $A \in \mathcal{M}(N \times N)$ poniamo

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Tale def ha senso perché:

- In $\mathcal{M}(N \times N)$ è definita la norma ($\|A\| = \inf\{M : \|Ax\| \le M|x| \ \forall x \in \mathbb{R}^N\}$) e quindi la nozione di limite
- Si ha $\sum_0^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \le \sum \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$ e quindi la serie è "assolutamente" convergente. Poiché lo spazio delle matrici è completo $\Rightarrow$ la serie $\sum_0^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge

NOTA CHE $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$

PROPRIETÀ (a) $e^0 = I$

(b) Se $A \cdot B = BA \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B$

(c) Dato $A \in \mathcal{M}(N \times N)$ definiamo $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}(N \times N)$ ponendo

$$M(t) = e^{tA}.$$

Allora M è derivabile e $M'(t) = A M(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Infatti se $h \neq 0$ si ha

$$\frac{M(h)-M(0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_0^\infty \frac{(hA)^n}{n!} - I\right) = \frac{1}{h}\sum_{n=1}^\infty \frac{(hA)^n}{n!} = A\sum_{n=1}^\infty \frac{(hA)^{n-1}}{n!} =$$

$$A\sum_{n=0}^\infty \frac{h^n A^n}{(n+1)!} = \left(\sum_0^\infty \frac{h^n A^n}{(n+1)}\right)A = \left(I + hA\underbrace{\sum_0^\infty \frac{h^n A^n}{(n+2)!}}_{N(t)}\right)A \Bigg)$$

e si vede che $\|N(t)\| \leq \sum_0^\infty \frac{|h|^n \|A\|^n}{(n+2)!} \leq \sum \frac{\|A\|^n}{(n+2)!}$ ← convergente se $|h| \leq 1$

da cui $\frac{M(h)-M(0)}{h} = (I + o(1))A \to A$. se $h \to 0$

Se poi $t \in \mathbb{R}$, dato che tA e hA commutano

$$\frac{M(t+h)-M(t)}{h} = \frac{e^{tA+hA} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} = \frac{M(h)-M(0)}{h}e^{tA} \to Ae^{tA}$$

CONSEGUENZA Se $Y_0 \in \mathbb{R}^N$ allora la funzione

$Y(x) = e^{tA}Y_0$ è (l'unica) soluzione di

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

(lo si deduce da quanto detto sopra.)

COME CALCOLARE e^A ?? Andiamo per difficoltà crescenti.

① Se A è diagonale, cioè $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix}$, allora

$$e^A = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N}).$$

Infatti, se $K \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^K \frac{1}{n!}\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^n = \mathrm{Diag}\left(\sum_{n=0}^K \frac{\lambda_1^n}{n!}, \dots, \sum_{n=0}^K \frac{\lambda_N^n}{n!}\right)$

da cui la tesi, passando al limite per $K \to \infty$

② Se $A = M^{-1}A_1M$ (M matrice invertibile), allora

$e^A = M^{-1}e^{A_1}M$. Infatti

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}(M^{-1}A_1M)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\underbrace{(M^{-1}A_1\cancel{M})(\cancel{M^{-1}}A_1\cancel{M})\cdots(\cancel{M^{-1}}A_1M)}_{n \text{ fattori}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{M^{-1}A_1^nM}{n!} =$$

$$M^{-1}\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}A_1^n\right)M = M^{-1}e^{A_1}M$$

③ Se $A = M^{-1}\,\mathrm{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)\,M$ allora

$$e^A = M^{-1}\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n})\,M$$

Questo è il caso se A è simmetrica.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

- Calcoliamo gli auto-valori. $P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda-2)$

  $\Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2.$

- Troviamo degli autovettori. Se $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ deve essere $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

  $x = y$. Per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dato che e_2 deve essere ortogonale a e_1 posso prendere $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- Considero $M = [e_1, e_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (M manda $\hat{e}_i$ in $\hat{e}$)

  La sua inversa è multipla della trasposta: $M^{-1} = \frac{1}{\det M} M^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

  Dunque $e^A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & -e^2 \end{pmatrix} =$

  $= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^2 & 1-e^2 \\ 1-e^2 & 1+e^2 \end{pmatrix}$ $\qquad \left\{ e^{tA} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{2t} & 1-e^{2t} \\ 1-e^{2t} & 1+e^{2t} \end{pmatrix} \right\}$

Ne segue che la soluzione di:

$$\begin{cases} x' = x - y & x(0) = 1 \\ y' = -x + y & y(0) = -1 \end{cases}$$

è data da $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{2t} & 1-e^{2t} \\ 1-e^{2t} & 1+e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x(t) = e^{2t} \\ y(t) = -e^{2t} \end{matrix}$$

VERIFICA $\quad x'(t) = 2e^{2t}$, $\quad y'(t) = -2e^{2t}$

$$\begin{matrix} x - y \\ -x + y \end{matrix} = \begin{matrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{matrix} = \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix}$$

TORNA