Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 62 21/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

Esercizio Prendiamo

$$\vec{f} = \left(z(x^3+y^3)+e^{yz}\right)\vec{\imath} - \left(z(x^3-y^3)+e^{xz}\right)\vec{\jmath} - (z^2-1)(x^2+y^2)\vec{k}$$

$$B_0 = \{x^2+y^2 \le 1,\ z=0\} \qquad B_1 = \{x^2+y^2 \le \tfrac{1}{4},\ z=1\}$$

$$S = \left\{x^2+y^2 = \frac{1}{(z+1)^2},\ 0 \le z \le 1\right\}$$

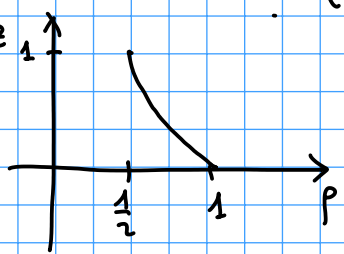
CALCOLARE I FLUSSI DI $\vec{f}$ su B_0, B_1, S

dove su B_i prendo $\hat{\nu} = \vec{k}$, e su S la normale che punta fuori

B_0 cerchio di raggio 1 B_1 cerchio di raggio $1/2$

S è ottenuta ruotando l'iperbole $\left\{\rho^2 = \left(\frac{1}{z+1}\right)^2\right\} = \left\{\rho = \frac{1}{z+1},\ 0 \le z \le 1\right\}$

$\left\{z = -1 + \frac{1}{\rho},\ \frac{1}{2} \le \rho \le 1\right\}$



- FLUSSO SU B_0 = $\hat{\nu} =$

$$\iint_{B_0} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 1} \vec{f}(x,y,0)\cdot\vec{k}\,dx = \iint_{x^2+y^2\le 1} f_3(x,y,0)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy \quad \overset{\text{(coordinate polari)}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \rho\,d\rho =$$

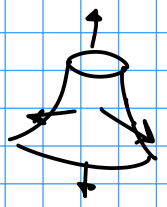
$$2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2} \leftarrow \text{FLUSSO su } B_0}$$

- FLUSSO su $B_1 = 0$ perché viene

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} \underbrace{\vec{f}(x,y,1)\cdot\vec{k}}_{=0}\,dx\,dy = 0$$

- Per fare il flusso su S usiamo il teorema della divergenza su $\Omega = \{x^2+y^2 < \frac{1}{(z+1)^2},\ 0<z<1\}$: si ha

$\partial\Omega = B_0 \cup B_1 \cup S$. Se voglio $\hat{\nu}$ normale uscente a Ω devo prendere $\hat{\nu} = \vec{k}$ su B_1, $\hat{\nu} = -\vec{k}$ su B_0 e $\hat{\nu}$ verso l'esterno su S.



$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma - \frac{\pi}{2}$$

(calcolato prima (cambio di segno a causa della normale))

Calcolo la divergenza:

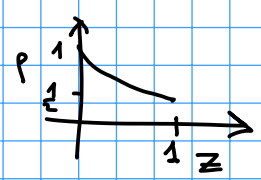
$$\frac{\partial}{\partial x} zx^3 + \frac{\partial}{\partial y} zy^3 - \frac{\partial}{\partial z}(z^2-1)(x^2+y^2) =$$

$$3x^2z + 3y^2z - 2z(x^2+y^2) = z(x^2+y^2) \leftarrow \text{LA INTEGRO su } \Omega:$$

$$\iiint_\Omega z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z\,dz \underbrace{\iint_{\{x^2+y^2\le\frac{1}{(z+1)^2}\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy}_{\text{coord. pol.}} =$$

$$\int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\{\rho^2\le\frac{1}{(z+1)^2}\}} \rho^2\rho\,d\rho =$$

$$2\pi \int_0^1 z\,dz \int_0^{1/(z+1)} \rho^3\,d\rho =$$



$$2\pi \int_0^1 z \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1/z+1} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{z+1-1}{(z+1)^4}\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dz}{(z+1)^3} - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dz}{(z+1)^4} =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{-2}\frac{1}{(t+1)^2}\right]_0^1 - \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{-3}\frac{1}{(t+1)^3}\right]_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}\pi - \frac{7}{48}\pi = \frac{2}{48}\pi = \frac{\pi}{24}$$

Φ FLUSSO DI $\vec{f}$ SU $\partial\Omega$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{13}{24}\pi}$$

ESERCIZIO $\quad \Omega := \{x^2+y^2 \le 4,\ 1 \le z \le x^2+y^2\}$

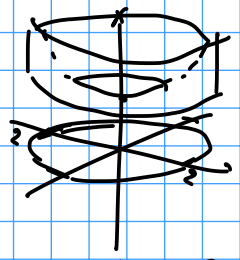
$$S := \{1 \le x^2+y^2 \le 4,\ z = x^2+y^2\}$$

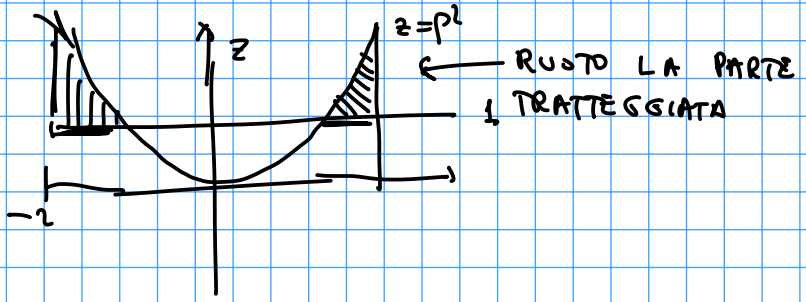
$$\vec{f}(x,y,z) := \boxed{\frac{2y}{x^2+y^2}\vec{\imath} - \frac{3x}{x^2+y^2}\vec{\jmath} - \vec{k}}$$

Come è fatto Ω ?! $\quad$ Ω è normale rispetto a z:

$$\Omega = \{g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y) \quad (x,y) \in D\}$$ dove

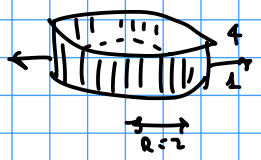
$$D = \{x^2+y^2 \le 4\},\quad g_1(x,y) = 1,\quad g_2(x,y) = x^2+y^2$$





Come è fatto la frontiera $\partial\Omega$

$$\partial\Omega = \underbrace{\{x^2+y^2 = 4,\ 1 \le z \le 4\}}_{L} \cup$$



$$\cup \underbrace{\{x^2+y^2 \le 4,\ 1 = z \le x^2+y^2\}}_{B = \{1 \le x^2+y^2 \le 4,\ z=1\}} \cup$$

B

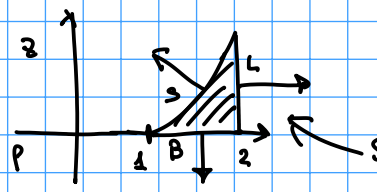
$$\cup \underbrace{\{x^2+y^2 \le 4,\ 1 \le z = x^2+y^2\}}_{S}$$

$$\boxed{\partial\Omega = L \cup B \cup S}$$

Se nelle su $\partial\Omega$ la normale uscente da $\Omega \Rightarrow$

$\hat{\nu} = -\vec{k}$ su B , $\hat{\nu}$ PUNTA VERSO FUORI SU L ,

Su S la $\hat{\nu}$ è concorde con $\vec{k}$ e la sua proiezione su x,y punta verso (0,0)



- Calcoliamo il flusso di $\vec{f}$ su $\partial\Omega$ NOTA che $x^2+y^2 \geq 1$ su $\overline{\Omega}$

$\Rightarrow \vec{f}$ è C^1 su $\overline{\Omega} \Rightarrow$ posso applicare il teorema della divergenza

CALCOLO LA DIVERGENZA DI $\vec{f}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{3x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial z}1 =$$

$$2y\,\frac{1}{(x^2+y^2)^2}(-2x) - 3x\,\frac{(-2y)}{(x^2+y^2)^2} + 0 = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Calcolo $\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_A \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\int_1^{x^2+y^2} dz =$

dove $A = \{\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \,\}$ $\Big|$ $= \iint_A \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\left((x^2+y^2)-1\right)dx\,dy =$ coord. pol.

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{2(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)}{\rho^4}(\rho^2-1)\,\rho\,d\rho =$$

$$2\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta}_{=0} \int_1^2 \frac{(\rho^2-1)}{\rho}\,d\rho = 0$$

DUNQUE $\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 0$

VEDIAMO SE RIUSCIAMO A CALCOLARE I TRE FLUSSI SU B, L, S (con le stesse normali)

- $\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_A \vec{f}(x,y,1)\cdot(-\vec{k})\,dx\,dy = -\iint_A f_3(x,y,1)\,dx\,dy =$

$$\iint_A 1\,dx\,dy = |A| = \pi\cdot 2^2 - \pi\,(1)^2 = \boxed{3\pi}$$

- $\iint_L \vec{f}\cdot\hat{v}\,d\sigma$ USO LA PARAM. $\Gamma(\theta,z)$ $\theta\in[0,2]$, $1\le z\le 4$

$$\Gamma(\theta,z) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\Gamma_\theta = -2\sin\theta\,\vec{i} + 2\cos\theta\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\Gamma_z =$$

$$\vec{N}(\theta,z) = 2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{i}\otimes\vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{j}\otimes\vec{k} = \vec{i}$$

$$\Rightarrow \iint_{\substack{0\le\theta\le 2\pi \\ 1\le z\le 4}} \vec{f}(\Gamma(\theta,z))\cdot\vec{N}(\theta,z)\,d\theta\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_1^4 \left(\frac{2\cdot 2\sin\theta}{4}\,\vec{i} - \frac{3\cdot 2\cos\theta}{4}\,\vec{j} - \vec{k}\right)\left(2\cos\theta\,\vec{i} + 2\sin\theta\,\vec{j}\right)d\theta\,dz$$

$$3\int_0^{2\pi}\left(2\sin\theta\cos\theta - 3\sin\theta\cos\theta\right)d\theta = -3\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta = 0$$

↑ INT. IN z DI 1 TRA 1 e 4

- Per l'additività $\Rightarrow$ $\iint_\sigma \vec{f}\cdot\hat{v}\,d\sigma = -3\pi$

Proviamo a verificare se viene -3π usando la def di flusso.

Parametrizzo S come grafico di $z = x^2+y^2$ su A $\Rightarrow$

$$\vec{N}(x,y) = (-2x,\ -2y,\ 1) \Rightarrow$$

$$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{v}\,d\sigma = \iint_A f(x,y,x^2+y^2)\cdot(-2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + \vec{k})\,dx\,dy =$$

$$\iint_A \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\,\vec{i} - \frac{3x}{x^2+y^2}\,\vec{j} - \vec{k}\right)\left(-2x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + \vec{k}\right)dx\,dy =$$

$$\iint_A \left(-\frac{4x^2y}{x^2+y^2} + \frac{6xy}{x^2+y^2} - 1\right)dx\,dy = \underbrace{\iint_A \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy}_{=0} - |A| = -3\pi$$

ULTIMO ARGOMENTO: SISTEMI DI EQ. DIFF. $\left(Y' = F(X,Y)\right.$

TEOREMA GENERALE DI ESISTENZA E UNICITÀ DI CAUCHY

N intero, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un aperto

i punti di Ω li scrivo come (x, Y) con $x \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbb{R}^N$

$F: \Omega \to \mathbb{R}^N$ è **CONTINUA** e in più soddisfa:

(*) $\exists L \in \mathbb{R}^+ : \| F(x, Y_1) - F(x, Y_2) \|_{\mathbb{R}^N} \leq L \| Y_1 - Y_2 \| \quad \forall (x, Y_1), (x, Y_2) \in \Omega$

(F è lipschitziana in Y, uniformemente rispetto a x)

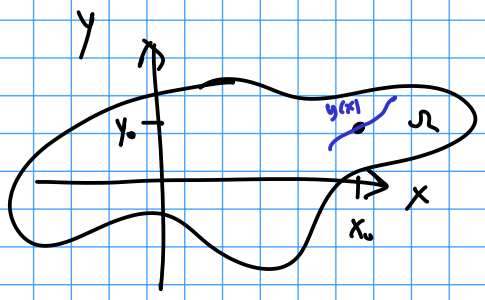
ALLORA Per ogni $(x_0, Y_0) \in \Omega$ $\exists \varepsilon > 0$ e una curva

ESISTENZA LOCALE

$Y :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}^N$ tale che

- $(x, Y(x)) \in \Omega \quad \forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$
- Y è C^1
- $Y(x_0) = Y_0$
- vale l'equazione $Y'(x) = F(x, Y(x))$

$\to$ (P) $\begin{cases} Y' = F(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$ PROBLEMA DI CAUCHY



INOLTRE $Y(x)$ è l'unico curva su $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ con tale proprietà ($\nexists Z :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}^N$ $(x, Z(x)) \in \Omega$, Z verifica (P) $\Rightarrow Z = Y$

ESEMPIO

$F(x, y) = x|y| \qquad \Omega = \{ (x, y) : |x| < 1, \ y \in \mathbb{R} \}$

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| = |x| \, |y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2| \quad \forall x, y_1, y_2$$

TEOREMA (esistenza dell'intervallo massimale)

Supponiamo che $F: \Omega \to \mathbb{R}^N$ sia come sopra.

Dato $(x_0, Y_0) \in \Omega$ $\exists$ $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto tale che:

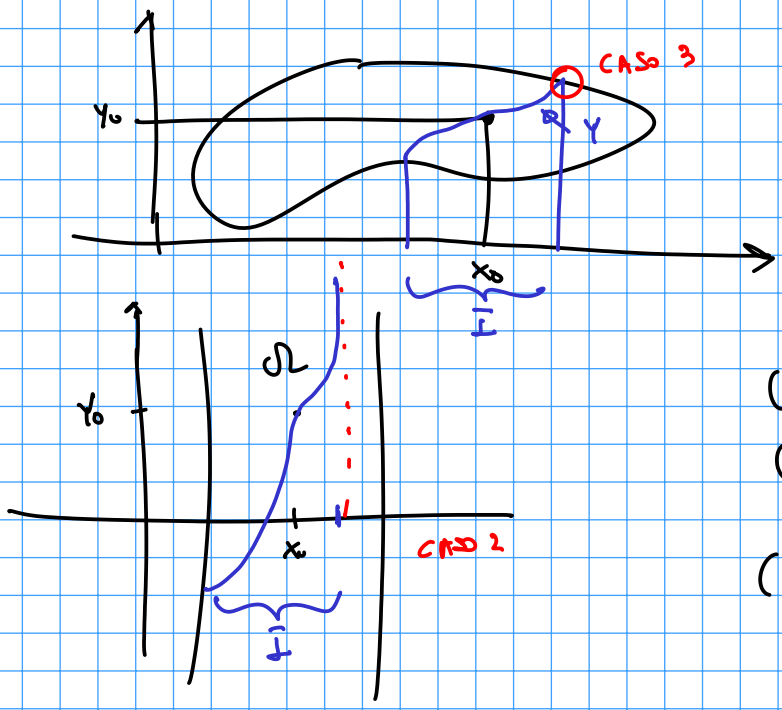
(a) $x_0 \in I$

(b) Esiste $Y : I \to \mathbb{R}^N$ tale che (Y è sol. su I)

Y è C^1, $Y(x_0) = Y_0$, $(x, Y(x)) \in \Omega$ $\forall x \in I$, $Y'(x) = F(x, Y(x))$

(c) I è massimale: se I_1 è un altro intervallo aperto con $I \subset I_1$ e se esiste $Y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^N$ come in (b) $\Rightarrow$ $I_1 = I$

INOLTRE $Y : I \to \mathbb{R}^N$ è UNICA TRA LE SOLUZIONI.



Poniamo $I =]a, b[$ con $-\infty \le a < x_0 < b \le +\infty$

Ci sono tre casi per b (e stesso per a)

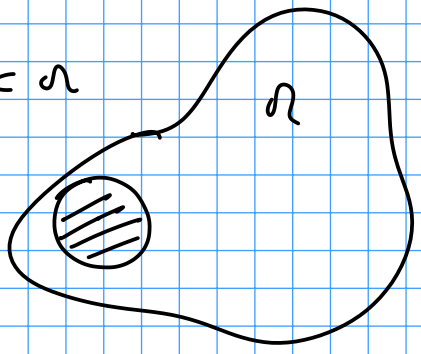
(1) $b = +\infty$

(2) $b < +\infty$, $\lim_{x \to b^-} \|Y(x)\| = +\infty$

(3) $b < +\infty$ $\lim_{x \to b^-} \operatorname{dist}(Y(x), \partial\Omega) = 0$

OSSERVAZIONE Supponiamo che $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ abbia derivate $\frac{\partial F}{\partial y_1} \dots \frac{\partial F}{\partial y_N}$ continue rispetto a (x, Y)

Allora per ogni palla $B(x_0, R)$ con $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ vale l'ipotesi (*).



IN EFFETTI

$$\|F(x, Y_1) - F(x, y_2)\| \le \max_{B(x_0,R)} \|\nabla_Y F(x,y)\| \|Y_1 - Y_2\|$$

$\le$ costante

Come mai vale la disug. ?! Prendo $\varphi(t) = F(x, tY_1 + (1-t)Y_2)$

(calcolo F sul segmento di Y_1 e Y_2)

$$\varphi'(t) = \nabla_Y F(X_1, tY_1 + (1-t)Y_2) \cdot (Y_2 - Y_1)$$

$$\Rightarrow |\varphi'(t)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \|\nabla_Y F(X_1, tY_1 + (1-t)Y_2)\| \cdot \|Y_2 - Y_1\| \leq$$

$$\max_{Y \in \overline{B}} \|\nabla_Y F(X_1, Y)\| \; \|Y_2 - Y_1\|$$

Allora $\|F(X_1, Y_1) - F(X_1, Y_2)\| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \int_0^1 |\varphi'(t)\,dt|$

$$\leq \underline{\max} \; \|Y_2 - Y_1\|$$

(F differenziabile $\Rightarrow$ F localmente Lipschitziana)

Dato che il teorema di Cauchy è "locale" per la sua tesi

Basta che la funzione F verifichi l'ipotesi (*) vicino a x_0

per esempio basta F differenziabile in Y con continuità in un intorno di (x_0, Y_0)