Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 60 15/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPIO Consideriamo $\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(è un campo "radiale" cioè del tipo $\vec{f}(P) = \varphi(\|P\|)\,\vec{P}$

($\vec{P} = P - 0$ il vettore posizione))

Calcoliamo la divergenza di $\vec{f}$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} =$$

(in evidenza)

$$\frac{(x^2+y^2+z^2) - 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \dots = \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \dots = \frac{(x^2+y^2+z^2) - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

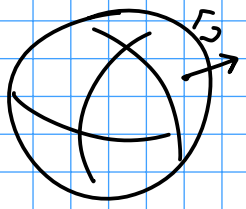
$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{f} = \frac{3(x^2+y^2+z^2) - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2}{(\quad)^{5/2}} = 0$$

VEDIAMO SE VALE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA SU

$\Omega = \{x^2+y^2+z^2 < 1\} = B \qquad \partial\Omega = \{x^2+y^2+z^2 = 1\} =: S$

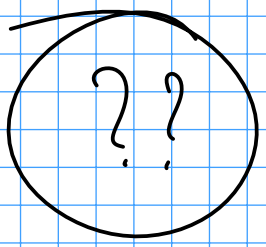
Dovrebbe venire

$$0 = \iiint_B \operatorname{div} \vec{f}\, dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma =$$



NOTIAMO CHE $\hat{\nu}(P) = \vec{P} \quad \forall P \in S$

$$\vec{f}(P) = \frac{\vec{P}}{\|P\|^3} \quad \forall P$$



$$\Rightarrow \quad \vec{f}(P)\cdot\hat{\nu} = \frac{1}{\|P\|} = 1 \quad \forall P \in S$$

per cui $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_S 1\, d\sigma = 4\pi$

COME MAI NON VIENE ZERO ??

IL CAMPO NON È DEFINITO in $P=(0,0,0)$ (non è C^1 su B)

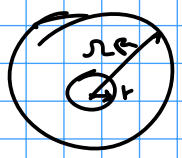
$\lim_{P\to 0} \|\vec{f}(P)\| = +\infty$

Cosa ricorda dal teorema della div. per questo campo ?

Posso considerare $\Omega = B_R \setminus \overline{B}_r = \{r^2 < x^2+y^2+z^2 < R^2\}$

con $r < R$. IN Ω $\vec{f}$ è C^1 e quindi

$$0 = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_{S_R} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma \ominus \iint_{S_r} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$$



Tra $\iint_{S_r}$ e $-\iint_{S_r}$ (sezione di Ω)

dove le sfere S_R e S_r sono entrambe dotate di normale che punta verso l'esterno alle palle corrispondenti

ORA $\forall P \in S_R \quad \vec{f}(P) = \dfrac{\vec{P}}{\|P\|^3}$ e $\hat{\nu} = \dfrac{\vec{P}}{\|P\|} \Rightarrow$

$$\vec{f}(P)\cdot\hat{\nu} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{P}}{\|P\|^4} = \frac{\|P\|^2}{\|P\|^4} = \frac{1}{\|P\|^2} \Rightarrow$$

$$\iint_{S_R} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \frac{1}{R^2}\iint_{S_R} d\sigma = \frac{1}{R^2}A(S_R) = \frac{1}{R^2}\,4\pi R^2 = 4\pi$$

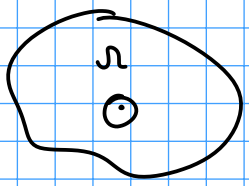
DUNQUE TROVO che $\iint_{S_r}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{S_R}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma \quad (=4\pi)$

IN REALTÀ NON VALE SOLO PER LE SFERE!!

Se Ω è un aperto che contiene l'origine $=1$

$\iint_{\partial\Omega}\vec{f}\,\hat{\nu}\,d\sigma = 4\pi$ perché applico il teorema della

divergenza a $\Omega\setminus B_r = \{x^2+y^2+z^2<r^2\}$ $r>$ piccolo a in modo da non interferire con $\partial\Omega$



$$0 = \iiint_{\Omega\setminus B_r}\operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz =$$

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma - \iint_{S_r}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma - 4\pi \Rightarrow \iiint_{\Omega}\vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 4\pi$$

Lemma Se $\vec{f}$ è un campo C^1 allora per ogni vettore $\vec{v}$

si ha $\operatorname{rot}\vec{f}\otimes\vec{v} = \left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial(x,y,z)} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial(x,y,z)}^{t}\right)\vec{v}$

Jacobiana di $\vec{f}$ — Trasposto

Dim è una questione di combinatorio. Vediamo un caso semplice

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot}\vec{f} = \det\begin{pmatrix} i & D_x & 0 \\ j & D_y & 0 \\ k & D_z & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}\otimes\vec{v} = \det\begin{pmatrix} i & f_y & v_1 \\ j & -f_x & v_2 \\ k & 0 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x v_3 \\ -f_y v_3 \\ f_x v_1 + f_y v_2 \end{pmatrix}$$

vediamo l'altro lato dell'uguaglianza:

$$J\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \qquad J_{\vec{f}} - J_{\vec{f}}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f_x \\ 0 & 0 & -f_y \\ f_x & f_y & 0 \end{pmatrix}$$ se la applico a $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ trovo

Si può fare il calcolo analogo a $\vec{f} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{pmatrix}$

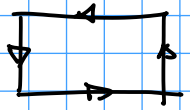
e poi si usa la tesi per linearità.

RICORDIAMO UN CALCOLO GIÀ VISTO (in $\mathbb{R}^2$)

Se $R = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ (rettangolo) e

$\vec{F} : R \to \mathbb{R}^2$ si ha:

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial R} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



QUESTO CALCOLO SI PUÒ GENERALIZZARE A UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$

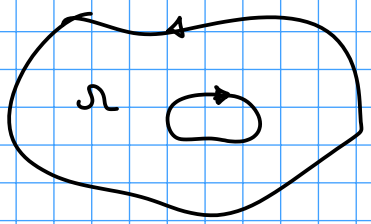
$\Rightarrow$

TEOREMA (Formula di Gauss-Green)

Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^2$; $\vec{F} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ campo C^1

Allora

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \left(= \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right)$$



$\partial\Omega$ è descritto con un'unione finita di curve C^1 a tratti γ_i che hanno verso coerente con Ω

DA QUESTO TEOREMA SI RICAVA

TEOREMA (di STOKES)

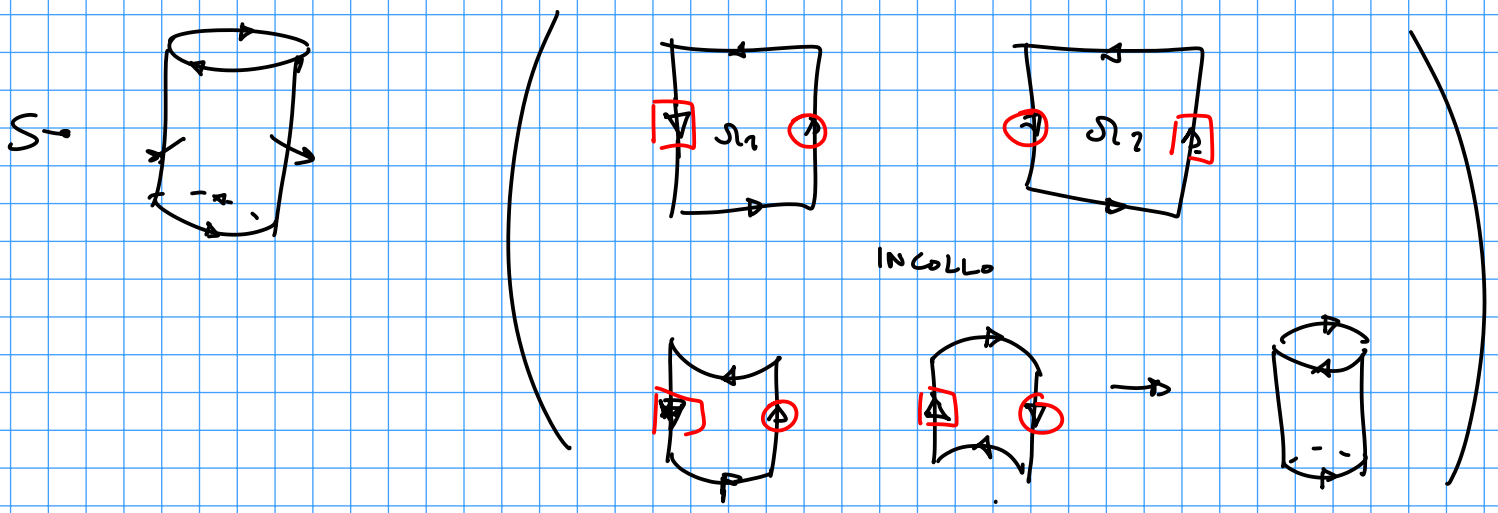
Se S è una superficie regolare con un'orientazione $\hat{\nu}$

Se $\vec{f}$ è un campo C^1 su S (su un aperto che contiene S)

ALLORA

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \int_{\Sigma(S)} \vec{f} \cdot d\vec{s} \quad \left(= \sum \int_{\gamma_i} \vec{f} \cdot d\vec{s} \right)$$

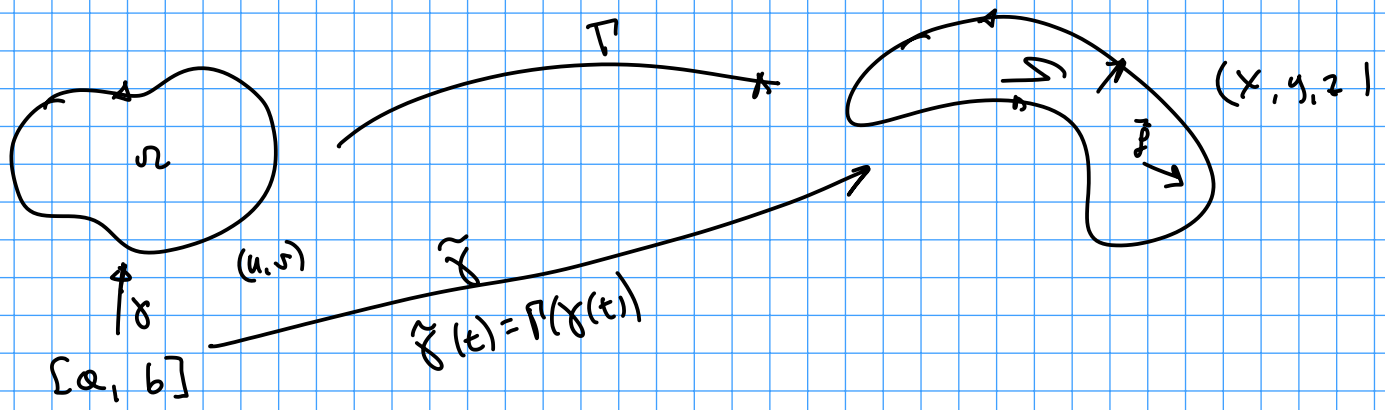
dove $\Sigma(S)$ è descritto da una famiglia finita di curve regolari a tratti con verso coerente con l'orientazione $\hat{\nu}$



Dim. (a) Supponiamo S sia parametrica: ho un $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ regolare e $\Gamma : \Omega \to S$ di classe C^1 con

$$\vec{N} = \Gamma_u \otimes \Gamma_v \neq 0$$

Inoltre supponiamo per semplicità che $\partial\Omega$ sia descritto da una sola γ chiusa e regolare che viene trasformata in $\tilde{\gamma} := \Gamma(\gamma)$



Supponiamo anche (si potrebbe fare a meno...) che Γ sia C^2

Sia $\vec{f}$: (un intorno di) $S \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1

Costruisco un campo $\vec{F} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ ponendo

$$F_1(u,v) := \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \qquad \text{(prodotto scalare)}$$

$$F_2(u,v) := \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$$

I°

Calcolo

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{f}\circ\Gamma\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v} + \left(\vec{f}\circ\Gamma\right)\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial u \partial v} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{f}\circ\Gamma\right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u} + \left(\vec{f}\circ\Gamma\right)\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial v \partial u} \right)$$

le derivate II° sono simmetriche

(NOTA CHE LE DER IV. II° spariscono dal calcolo)

$$= \left[\left(J_{\vec{f}} \circ \Gamma\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial u}\right] \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v} - \left[\left(J_{\vec{f}} \circ \Gamma\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial v}\right] \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u} =$$

$$\left(\left[\left(J_{\vec{f}} - J_{\vec{f}}^{\,t}\right)\circ\Gamma\right]\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \underset{\text{Lemma}}{=} \left[\left(\operatorname{rot}\vec{f}\right)\circ\Gamma\right] \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v} =$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v}\right)}_{\vec{N}(u,v)} \cdot \operatorname{rot}\vec{f} \circ \Gamma$$

DUNQUE

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F_2}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial v}\right) du\,dv = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}\vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v)\, du\,dv =$$

$$\iint_{S} \operatorname{rot}\vec{f} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$$

II° $$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\right) dt =$$

$$\int_a^b \left(\vec{f}(\Gamma(\gamma(t))) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial u}(\gamma(t))\right)\gamma_1'(t) + \left(\vec{f}(\Gamma(\gamma(t))) \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(\gamma(t))\right)\gamma_2'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \vec{f}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial u}(\gamma(t))\,\gamma_1'(t) + \frac{\partial \Gamma}{\partial v}(\gamma(t))\,\gamma_2'(t)\right]}_{\tilde{\gamma}'} dt = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{f}\, d\vec{s}$$

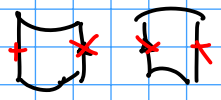
INFATTI $\forall\ \tilde{\gamma} = \Gamma \circ \gamma \Rightarrow \tilde{\gamma}' = J_\Gamma \gamma' = \left[\frac{\partial \Gamma}{\partial u}, \frac{\partial \Gamma}{\partial v}\right]\begin{pmatrix}\gamma_1' \\ \gamma_2'\end{pmatrix} =$

$$\gamma_1' \frac{\partial \Gamma}{\partial u} + \gamma_2' \frac{\partial \Gamma}{\partial v}$$

III

APPLICANDO GAUSS-GREEN TROVO LA TESI nel caso di S superficie Parametrica.

Nel caso generale "incollo" i vari pezzi -- (i contributi sui bordi che si incollano SPARISCONO



DEF. (Potenziale vettore) Dato un campo $\vec{f}$ (CONTINUO) dico che $\vec{F}$ è un POTENZIALE VETTORE per $\vec{f}$ se $\vec{F}$ è C^1 e $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f}$ $\quad (\vec{\nabla} \otimes \vec{F} = \vec{f})$

OSS. Se $\vec{f}$ è C^1 ed esiste $\vec{F}$ con $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{f} \Rightarrow$ $\operatorname{div} \vec{f} = 0$

Formalmente $\quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla})}_{=0}$

Def. Se $\operatorname{div} \vec{f} = 0$ dico che $\vec{f}$ è SOLENOIDALE.

DUNQUE se $\vec{f}$ AMMETTE POT. VETTORE $\Rightarrow \vec{f}$ SOLENOIDALE

(presente della proprietà analoga $\vec{f}$ ammette Potenziale $\Rightarrow \vec{f}$ irrotazionale!

IL VICEVERSA NON È SEMPRE VERO. c'è UNA CONDIZIONE SUL DOMINIO CHE RENDE VERA $\Leftarrow$:

Ω deve essere 2-semplicemente connesso INTUITIVAMENTE OGNI SUPERFICIE (2-DIM.) senza bordo deve essere deformabile a un punto

SE Ω È STELLATO LA COSA FUNZIONA:

Teorema Se Ω è stellato ogni campo solenoidale ha potenziale vettore.

ESEMPIO (come trovare un pot. vettore)

$$\vec{f} = y(z + 3y^2)\vec{i} + x(z - 3x^2)\vec{j} + \frac{x^2y^2}{1+x^2+y^2}\vec{k}$$

DOMANDA (a) $\exists\ \vec{F}$ pot. vett. per $\vec{f}$. (b) Se sì come ne trovo uno?

(a) condizione necessaria $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ (è anche sufficiente dato che $\vec{f}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ che è stellato rispetto a 0 ...)

$$\operatorname{div}\vec{f} = 0 + 0 + 0 = 0 \qquad \boxed{\text{ok}}$$

(b) Per trovare $\vec{F}$ cerco $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \det\begin{pmatrix} i & D_x & F_1 \\ j & D_y & F_2 \\ k & D_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_z F_2 \\ D_z F_1 \\ D_x F_2 - D_y F_1 \end{pmatrix} \quad \text{deve essere} \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$D_z F_1 = x(z - 3x^2) \qquad D_z F_2 = -y(z + 3y^2) \qquad D_x F_2 - D_y F_1 = \frac{x^2y^2}{1+x^2+y^2}$$

$$F_1 = \int x(z - 3x^2)\,dz = \frac{z^2}{2}x - 3zx^3 + c(x,y)$$

$$F_2 = -y\frac{z^2}{2} - 3y^3 z - d(x,y)$$

} dalle prime due condizioni

IMPONGO LA TERZA CONDIZIONE:

$$\underbrace{-\left(\frac{\partial}{\partial x}d(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}c(x,y)\right)}_{-\operatorname{div}(c,d)} = \frac{x^2y^2}{1+x^2+y^2}$$

PROVO A METTERE $c = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}d = -\frac{x^2y^2}{1+x^2+y^2} \Rightarrow$

$$d = -y^2\int \frac{x^2}{1+x^2+y^2}\,dx =$$

$$\frac{-y^2}{1+y^2}\int \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{1+y^2}}\,dx = \qquad s=\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \qquad x=\sqrt{1+y^2}\,s \qquad dx=\sqrt{1+y^2}\,ds$$

$$\frac{-y^2}{1+y^2}\int \frac{(1+y^2)\,s^2\sqrt{1+y^2}}{1+s^2}\,ds = -y^2\sqrt{1+y^2}\int \frac{s^2}{1+s^2}\,ds =$$

$$-y^2\sqrt{1+y^2}\,s + y^2\sqrt{1+y^2}\arctan(s) = -y^2 x + y^2\sqrt{1+y^2}\arctan\left(\frac{x}{1+y^2}\right) + \text{cost}(y)$$

$$\left(\int \frac{s^2}{1+s^2} = \int \frac{s^2+1}{s^2+1} - \int \frac{1}{1+s^2}\right)$$

$\Rightarrow$ posso prendere la costante $=0$ $\Rightarrow$

$$a(x,y) = -x y^2 + y^2\sqrt{1+y^2}\arctan\left(\frac{x}{1+y^2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F_1(x,y) = \dfrac{z^2}{2}x - 3zx^3 \\ F_2(x,y) = -y\dfrac{z^2}{2} - 3y^3 z + xy^2 - y^2\sqrt{1+y^2}\arctan\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right) \end{cases}$$

↑

POTENZIALE VETTORE

OSS. IL POT. VETTORE $\vec{F}$ NON È UNICO (OVVIAMENTE). SI HA:

Se $\operatorname{rot} F_1 = \operatorname{rot} F_2$ allora $F_1 = F_2 + \nabla\phi$ (se $\mathbb{R}^3$ è convesso)

con ϕ scalare