Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

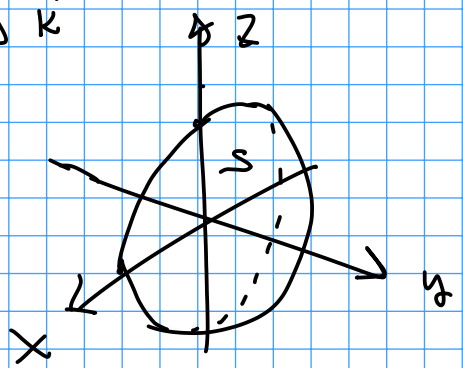
Lezione 59 14/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

ESEMPI SUL TEOREMA DELLA DIVERGENZA.

(1) $S = \{x^2+y^2+z^2=1,\ y\geq 0\}$

$\vec{f}(x,y,z) = 2x^3y\,\vec{i} + 3y^2z^2\,\vec{j} - x^2y\,\vec{k}$



S è una superficie (è un pezzo di sfera)

Per curiosità come descrivo $\Sigma(S)$ mediante una carta ?!

Posso descrivere S come grafico di una $y=g(x,z)$

dove $g(x,z) = \sqrt{1-x^2-z^2}$ definita su

$\Omega = \{x^2+z^2<1\}$

(NOTA che g è C^1 su Ω è continua su $\bar{\Omega} = \{x^2+y^2\leq 1\}$)

Con questa g ho la parametrizzazione

$\Gamma(u,v) = (u,\ g(u,v),\ v)$

che mi dà la normale $\left(\frac{\partial g}{\partial u}, -1, \frac{\partial g}{\partial v}\right)$ (concorde a $-\vec{j}$)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} = \left(1, \frac{\partial g}{\partial u}, 0\right) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \left(0, \frac{\partial g}{\partial v}, 1\right)$$

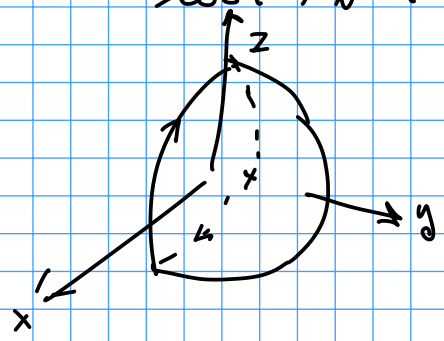
$$\vec{N} = \frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ j & g_u & g_v \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} = i\left(g_u, -1, g_v\right)$$

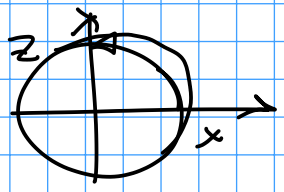
A questo punto $\Sigma(S) = \Gamma(\{x^2+z^2=1\}) = P(\partial\Omega)$

Se descrivo $\partial\Omega$ come $\underbrace{\cos\theta\, \hat{e}_1 + \sin\theta\, \hat{e}_2}_{\in \mathbb{R}^2}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

e applico $\Gamma \Rightarrow$ $\quad \Sigma(S)$ è descritto dalla curva $\left(\cos\theta, \sqrt{1-\cos^2\theta-\sin^2\theta}, \sin\theta\right) =$

$= \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{k}$

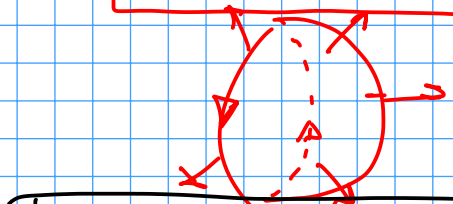




Se voleva orientato S con la normale concorde a $\vec{j}$

$\Rightarrow$ $\quad \Sigma(S) = \{x^2+z^2=1,\ y=0\}$ si deve descrivere con

$$\boxed{\gamma(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{k}} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

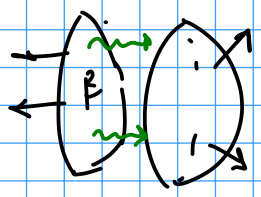


$$\left(\{i, j, k\} \to \{j, i, k\} \quad \det = -1\right)$$

$$\boxed{D := \{x^2+y^2+z^2 \le 1 \qquad y \ge 0\}}$$

Calcolare $\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$ ($\partial\Omega$ È ORIENTATO IN MODO "USCENTE DA Ω")

NOTA $\partial D = S \cup B$



$B = \{y=0,\ x^2+z^2 \le 1\}$

USANDO IL TEOR. DELLA

$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma =$

$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma + \iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma$

DOVE S ha normale concorde a $\vec{j}$ e B ha norm. $-\vec{j}$

DIVERGENZA POSSO DIRE CHE

$$\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{v}\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = (*)$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}2x^3y + \frac{\partial}{\partial y}3y^2z^2 + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y) =$$

$$6x^2y + 6yz^2 + 0 = 6y(x^2+z^2)$$

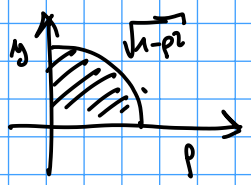
$$(*) = \iiint_D 6y(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = (**)$$

coord. cilindriche $\quad y = y \quad x = \rho\cos\theta \quad z = \rho\sin\theta$

$$dx\,dy\,dz = dy\;\rho\,d\rho\,d\theta$$

Le condizioni su x, y, z diventano

$$x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y\ge 0 \longrightarrow \boxed{\rho^2+y^2\le 1,\ y\ge 0} \qquad 0\le\theta\le 2\pi$$



$$(**) = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\left\{\substack{\rho^2+y^2\le 1\\ y\ge 0}\right\}} 6y\,\rho^2\,\rho\,d\rho = .$$

$$2\pi\int_0^1 6y\,dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\rho^3\,d\rho = 12\pi\int_0^1 y\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$\frac{12}{4}\pi\int_0^1 y(1-y^2)^2\,dy = \left(y^2=s \quad 2y\,dy=ds\right) = \frac{3}{2}\pi\int_0^1(1-s)^2\,ds$$

$$\frac{3}{2}\pi\left[\frac{(1-s)^3}{-3}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi\left(0-\frac{1}{-3}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\iint_{\partial D}\vec{f}\cdot\hat{v}\,d\sigma = \frac{\pi}{2}$$

QUANTO FA $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{v}\,d\sigma$ $\quad$ (con $\hat{v}$ concorde con $\vec{f}$)

(se S non è un bordo DICO di chiuso la normale)

Potrei applicare la definizione - MA poss anche sfruttare il calcolo sopra dato che

$$\frac{\pi}{2} = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{S} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_{B} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

(?!) $\qquad$ $(\hat{\nu} = -\vec{j})$

$B = \{x^2+z^2 \le 1,\ y=0\}$

Calcoliamo il secondo integrale. Posso vedere B come grafico della funzione costante $y = g(x,z) = 0 \Rightarrow \hat{\nu} = (0,-1,0)$

$$\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\{x^2+z^2\le 1\}} \vec{f}(x,0,z)(-\vec{j})\,dx\,dz = -\iint_{\{x^2+z^2\le 1\}} f_2(x,0,z)\,dx\,dz$$

($y^2z^2 = 0$ su B; f_2 è zero perché)

$= 0$

ALLA FINE $\qquad \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \frac{\pi}{2}$

Se avessi voluto applicare la def. avrei potuto prendere le coordinate sferiche (z, x, y)

$(x,y,z) = \Gamma(\theta,\varphi)$

$z = \cos\theta\sin\varphi \qquad x = \sin\theta\sin\varphi \qquad y = \cos\varphi$

$0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (METÀ SFERA) $\qquad (\rho = 1)$ $\Big\}\ \Gamma(\theta,\varphi)$

$\rightsquigarrow \quad \vec{N}(\theta,\varphi) = \sin\varphi\,\Gamma(\theta,\varphi)$ $\quad$ e l'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\vec{f}(\Gamma(\theta,\varphi))\cdot\Gamma(\theta,\varphi)\right)\sin\varphi =$$

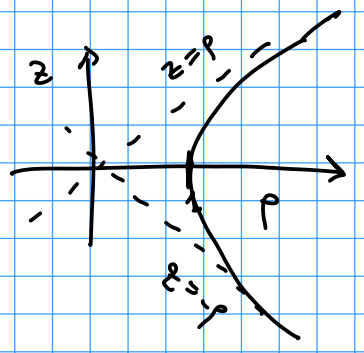
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \Big[(\sin\theta\sin\varphi)^2\cos\varphi\,\vec{i} + 3^2\cos^2\varphi\cos^2\theta\sin^2\varphi\,\vec{j} - \sin^2\theta\sin^2\varphi\cos\varphi\,\vec{k}\Big]\cdot$$
$$\Big[\sin\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{k}\Big]\sin\varphi\,d\varphi - \cdots$$

DOVREBBE VENIRE $\frac{\pi}{2}$ (è molto più complicato del modo usato prima, usando la divergenza)

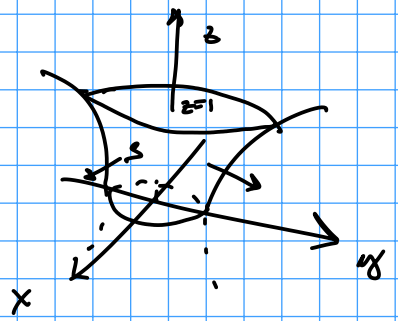
ESEMPIO $\qquad \Omega = \{x^2+y^2-z^2 < 1,\ 0 < z < 1\}$

$$S = \{ x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad 0 \le z \le 1 \}$$

Come è fatto S ?! $z \ge 0$ $z^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{\rho^2} - 1$ (è una sup. di rotaz.)



$$z = \sqrt{\rho^2 - 1} \qquad \rho^2 - z^2 = 1$$

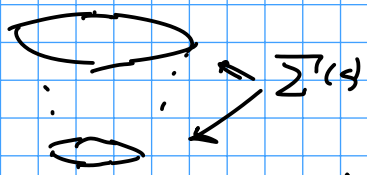


Ω è il "pieno" se $\partial\Omega$ è la superficie estesa

$$\partial\Omega = S \cup B_0 \cup B_1$$

dove $B_0 = \{ x^2 + y^2 \le 1 \quad z = 0 \}$

$B_1 = \{ x^2 + y^2 \le 2 \quad z = 1 \}$



Chi è il bordo $\Sigma'(S)$

e come è il verso di $\Sigma(S)$ se prendo la normale a S $\hat{\nu}$

che "punta ad allontanarsi dall'origine".

Per fare (nota che questa scelta di $\hat{\nu}$ è coerente con la direzione uscente da Ω)

parametrizziamo S con le coordinate

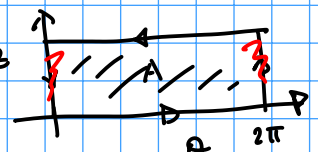
$\theta \in [0, 2\pi]$ $0 \le z \le 1$ $\left(x^2 + y^2 = 1 + z^2 \right)$

$x = (1+z^2)^{1/2} \cos\theta \qquad y = (1+z^2)^{1/2} \sin\theta, \quad z = z$

Cioè $\Gamma(\theta, z) = \sqrt{1+z^2}\cos\theta\ \vec{\imath} + \sqrt{1+z^2}\sin\theta\ \vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

per $(\theta, z) \in A = \{ 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 1 \}$

(c'è un incollamento a $\theta = 0$ $\theta = 2\pi$



Il bordo $\Sigma(S)$ si ottiene da $z = 0$ $0 \le \theta \le 2\pi$ e $z = 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

i due pezzi $\theta=0$ e $\theta=2\pi$ si cancellano $\Rightarrow$ Resta da

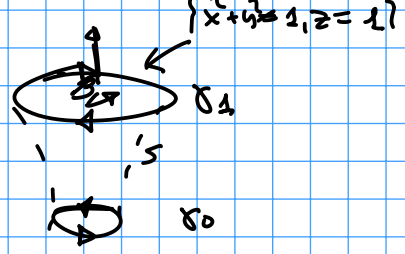
cercare

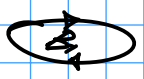
$(z=0)$ $\gamma_0(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

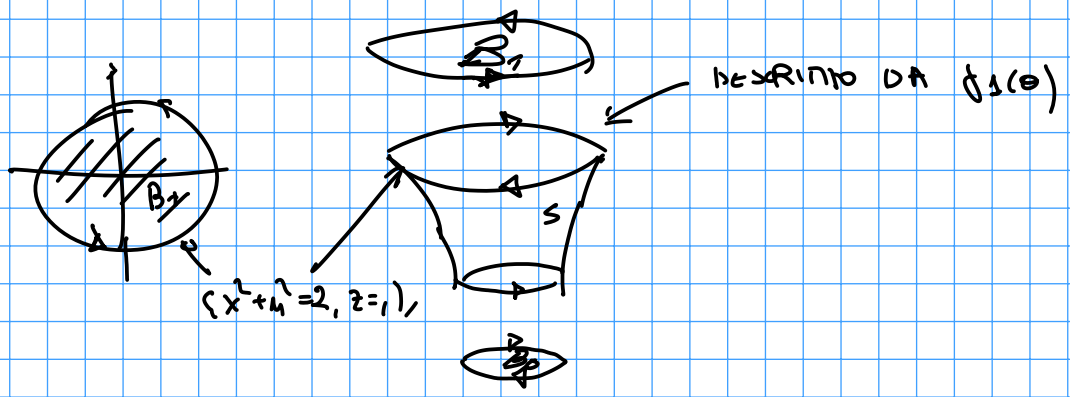
$(z=1)$ $\gamma_1(\theta) = \sqrt{2}\cos(2\pi-\theta) + \sqrt{2}\sin(2\pi-\theta) + \vec{k} =$

$\sqrt{2}\cos(-\theta) + \sqrt{2}\sin(-\theta) + \vec{k} =$

$\sqrt{2}\cos(\theta) - \sqrt{2}\sin(\theta) + \vec{k}$



NOTA CHE γ_1 descrive anche il bordo di B_1  coerente con la normale $-\vec{k}$: se voglio la normale $\vec{k}$ devo cambiare il verso (per descrivere $\Sigma(B_1)$) TORNA CON IL FATTO CHE $\partial\Omega$ è l'incollamento di $S + B_1 + B_0$ e se voglio orientare $\partial\Omega$ devo fare in modo che i versi di $\Sigma(S)$, $\Sigma(B_0)$, $\Sigma(B_1)$ "si semplifichino".



considero $\vec{f}(x,y,z) = 2x^3\,\vec{i} + 2y^3\,\vec{j} + \vec{k}$

e calcolo $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$ $\vec{f}_3$

VOGLIO USARE LA DIVERGENZA.

$\operatorname{div}\vec{f} = 3x^2 + 3y^2 + 0$

$$\iiint_{\Omega} 3z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

|| coord. cilindriche $z=z$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$

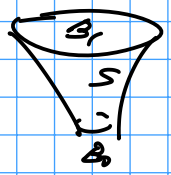
le condizioni su Ω diventano $0 \le z \le 1 \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le \rho \le 1+z^2$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} 3z\rho^2 \, \rho \, d\rho = 2\pi \int_0^1 z\,dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} \rho^3 d\rho =$$

$$2\pi \int_0^1 z \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1+z^2}} dz = \frac{2\pi}{4} \int_0^1 z(1+z^2)^2 = \qquad s = z^2$$

$$\frac{\pi}{4} \int_0^1 (1+s)^2 \, ds = \frac{\pi}{4} \left[\frac{(1+s)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{12}\pi$$

Se voglio $\iint_S$ mi servono $\iint_{B_0}$ e $\iint_{B_1}$



$$\iint_{B_1} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2 \le 2\}} f_3(x,y,1) \, dx\,dy = |\{x^2+y^2 \le 2\}| = \pi \cdot 2 = 2\pi$$

(qui $f_3(x,y,1) = 1$)

Analogamente $\iint_{B_0} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = -\iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} f_3(x,y,1)\,dx\,dy = -\pi(1)^2 = -\pi$

$\vec{f} \cdot \vec{k}$ $\quad$ $\vec{f} \cdot (-\vec{k})$ $\quad$ la normale è verso il basso

Adesso $\vec{f}$

$$\frac{7}{12}\pi = \iint_{\partial S} \vec{f} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma + \iint_{B_1} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma + \iint_{B_0} \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$

($\iint_{B_1} = 2\pi$, $\iint_{B_0} = -\pi$)

$$\Rightarrow \iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma = \left(\frac{7}{12} - 1 \right)\pi = -\frac{5}{12}\pi$$