Claudio Saccon (*)
Ingegneria Aerospaziale

Lezioni di Analisi Matematica 2 e Complementi

Lezione 57 08/5/18

(*) ricevimento il mercoledì alle 15.00 al Dip. Matematica
email: claudio.sacconCHIOCCIOLAunipi.it
web: http://pagine.dm.unipi.it/csblog1/

FLUSSO DI UN CAMPO $\vec{f}$ attraverso una superficie orientata $(S, \hat{\nu})$

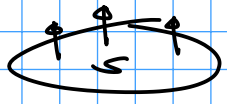
$$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\, d\sigma = \iint_\Omega f(\Gamma(u,v))\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial u}\Gamma(u,v)\otimes\frac{\partial\Gamma}{\partial v}(u,v)}_{\vec{N}}\, du\,dv$$

dove Γ è una parametrizzazione con normale $\vec{N}$ concorde con $\hat{\nu}$

($\hat{\nu}$ è un campo di vettori di norma 1, continuo, definito su $S\setminus\Sigma(S)$)

ESEMPIO $S = \{(x,y,z): x^2+y^2\le 1,\ z=1\}$

$\vec{f}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})$



Su S scelgo la normale $\hat{\nu} = \vec{k}$

Voglio calcolare il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S,\hat{\nu})$

Noto che S = grafico di $g(x,y)=1$ $\Rightarrow$

posto pertanto $\Gamma(x,y) = (x,y,g(x,y))$ $\Rightarrow$

$$\vec{N}(x,y) = \left(-\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}}_{=0}, -\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}}_{=0}, 1\right) \leftarrow \text{CONCORDE CON } \hat{\nu}=\vec{k}$$
$$\vec{N} = \vec{k}$$

Posso usare questa parametrizzazione per calcolare il flusso →

$$\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \vec{f}(x,y,1)\cdot(0\vec{i}+0\vec{j}+\vec{k})\,dx\,dy =$$

$$\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\Big|_{z=1} dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy = (\text{POLARI})$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\rho^2+1} = 2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\right]_0^1 = \pi\ln(2)$$

COME DETTO IERI IL FLUSSO NON CAMBIA SE CAMBIO LA PARAMETRIZZAZIONE PASSANDO DA Γ A Γ_1 PURCHÈ Γ e Γ_1 inducono lo stesso verso della normale →

$\Gamma_1 = \Gamma\circ\phi$ dove ϕ è un diffeomorfismo con $\det J_\phi > 0$

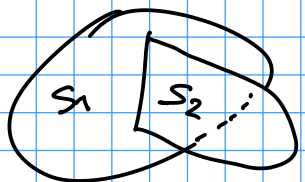
Se invece Γ_1 ha verso opposto ($\Gamma_1 = \Gamma\circ\phi$ con $\det J_\phi < 0$)
Γ_1 "va d'accordo" con $(S,-\hat{v})$ e il flusso cambia segno.

FINO AD ORA HO CONSIDERATO SUPERFICI PARAMETRICHE (MODELLATE SU UN $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) LA SFERA $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ NON È DI QUESTO TIPO !! VOGLIO UNA NOZIONE PIÙ GENERALE

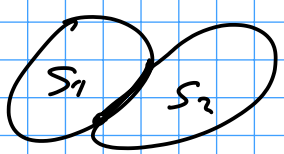
DEF. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ Dico che S è una SUPERFICIE REGOLARE A TRATTI se esistono $S_1 \dots S_n$ superfici parametriche tali che:

① $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$

② Se i,j sono tra 1 ed n $\Rightarrow$ $S_i \cap S_j \subset \Sigma(S_i)\cap\Sigma(S_j)$



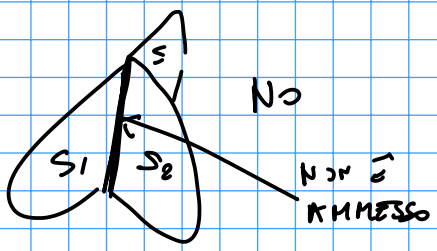
NO

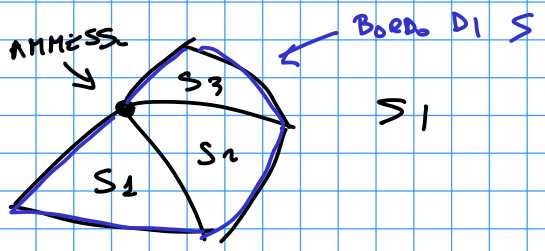


SI

③ I PUNTI X in cui "si incollano" più di due S_i sono un numero finito

(esistono al più un numero finito di punti $x \in S$ tali che $x \in S_i \cap S_j \cap S_k$ per $i \neq j \neq k$)





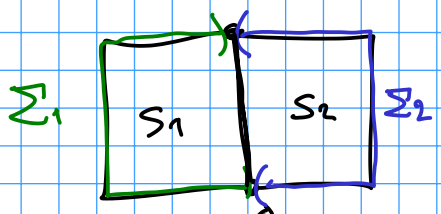
Dico in questo caso che S "si decompone" in $S_1 \dots S_n$ / che $S_1 \dots S_n$ è una decomposizione di S.

Dato S e una sua decomposizione $S_1 \dots S_n$ chiamo:

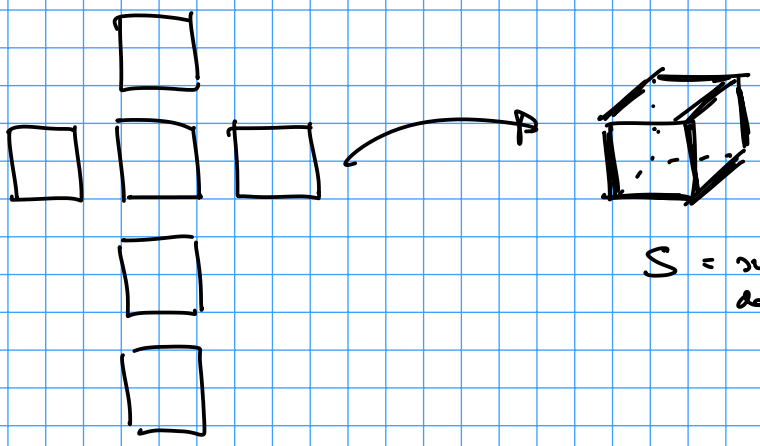
$$\text{Bordo di } S = \Sigma(S) = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \Sigma_i(S)} \quad \text{(chiusura)}$$

dove $\Sigma_i(S) = \Sigma(S_i) \setminus \bigcup_{j \neq i} S_j$

($\Sigma_i(S)$ sono i punti di $\Sigma(S_i)$ che non vengono incollati a quelli S_j)

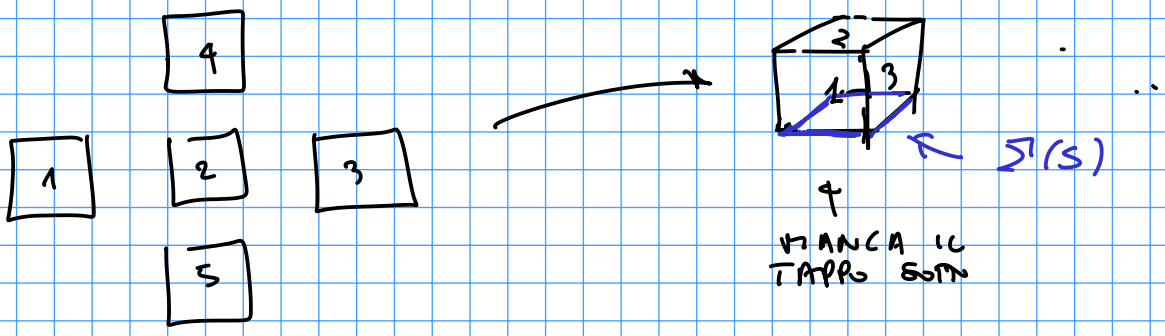


P LO METTO NEL BORDO ESSENDO NELLA CHIUSURA DI $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$



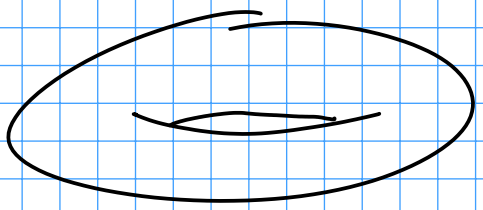
$\Sigma_i(S) = \emptyset$

S = superficie del cubo



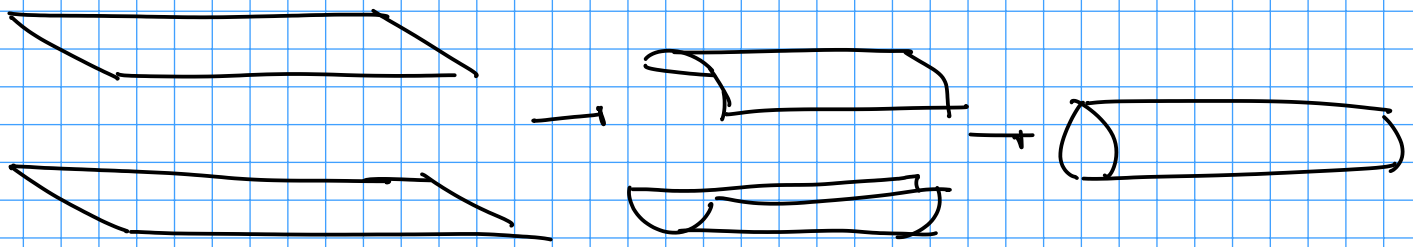
FATTO (che rende ben posta la definizione)

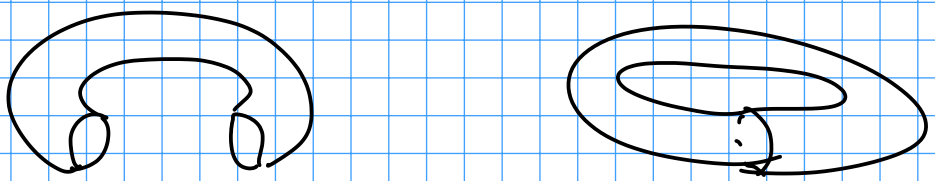
Se $S = S_1 \cdots S_m = S'_1 \cdots S'_m \Rightarrow$ la definizione di Bordo non cambia.



← TORO (la superficie)

LO POSSO SCOMPORRE IN TANTI MODI





LE LINEE DI INCOLLAMENTO SONO ARBITRARIE — IN QUALUNQUE MODO FACCIA $\Sigma^1(\text{TORO}) = \emptyset$

DEF. Dato un S come sopra, $x \in S$ dico che x è regolare se esiste una decomposizione $S_1 \cdots S_m$ per cui $x \in S_i \setminus \Sigma^1(S_i)$ per un i tra 1 e M

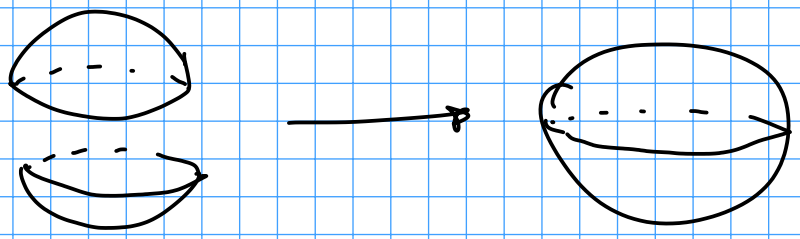
Poi $\Sigma^*(S) = \{x \in S \mid x \text{ NON REGOLARE}\}$

ESEMPI ① Se S = superficie del cubo

$\Sigma^*(S)$ = SPIGOLI

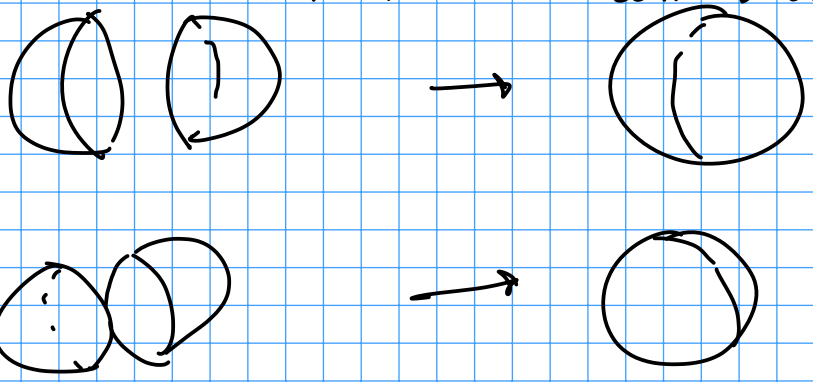
② Se S = sfera $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ tutti i punti sono regolari

$\Sigma^*(S) = \phi$



i punti fuori dall'equatore sono SICURAMENTE REGOLARI

MA POSSO INCOLLARE DIVERSAMENTE



DATO UN QUALUNQUE $P \in S$ TROVO UNA DECOMPOSIZIONE PER CUI $P \notin \Sigma(S_i)$

ALLORA Se $x \notin \Sigma^*(S)$ è ben definito il piano tangente $T_x(S) = T_x(S_i)$ se $x \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$

(e la definizione non cambia se cambio la decomposizione)

e anche la retta normale $N_x(S)$ = retta ortogonale a $T_x(S)$

Si vede che $\Sigma^*(S)$ è un insieme "trascurabile" in qualche senso

(non contribuisce agli integrali) $\Sigma^*(S)$ è unione finita di curve

DEF Data una superficie regolare a tratti e data una funzione

continuo su S è definito l'integrale di I specie

$$\iint_S f \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f \, d\sigma$$

dove S_i è una decomposizione di S

SI DIMOSTRA CHE $\iint_S f \, d\sigma$ NON DIPENDE DA COME DECOMPONGO S.

IN PARTICOLARE L'AREA DI S È

$$\iint_S 1 \, d\sigma$$

DEF. Siano S_1 ed S_2 due superfici regolari a tratti

Siano $S_{1,1} \dots S_{1,n}$ / $S_{2,1} \dots S_{2,M}$ due decomposizioni per S_1 e S_2.

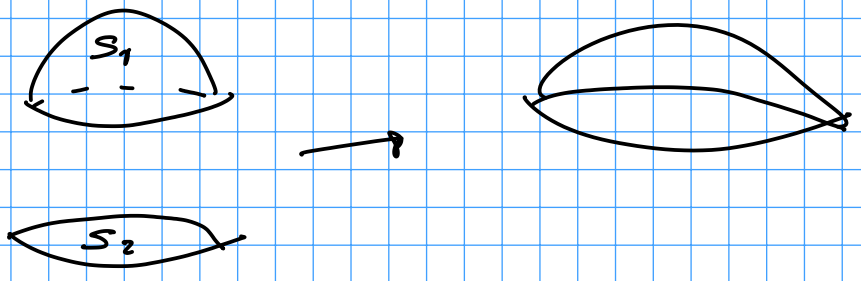
Se l'unione delle due famiglie finite verifica ① ② e ③

$\Rightarrow$ posso definire $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_{1,i} \cup \bigcup_{i=1}^{m} S_{2,i}$ che indico

$$S = S_1 \vee S_2 \quad (\text{l'involucro tra } S_1 \text{ e } S_2)$$

ALLORA per qualunque f definita su $S_1 \vee S_2$, continua

$$\iint_{S_1 \vee S_2} f \, d\sigma = \iint_{S_1} f \, d\sigma + \iint_{S_2} f \, d\sigma$$

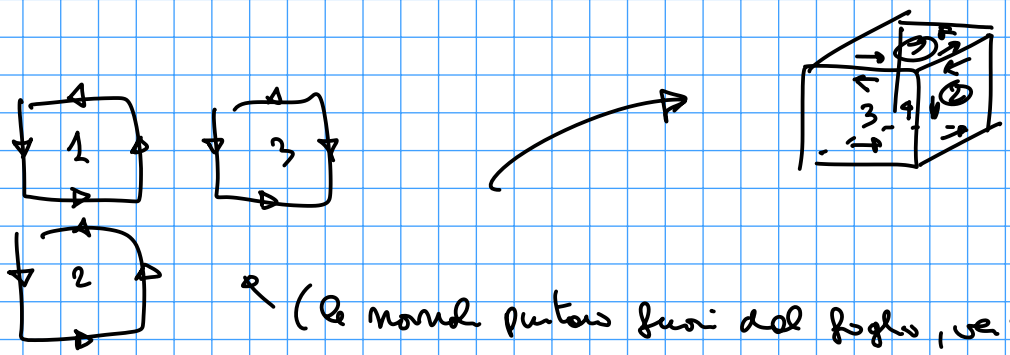


MI SERVE LA NOZIONE DI SUPERFICIE (GENERICA) ORIENTATA

DEF. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$. Dico che S è orientabile se esistono $(S_1, \hat{\nu}_1) \dots (S_n, \hat{\nu}_n)$ superfici parametriche orientate

tali che Si verifica ① ② ③ e in più

se $x \in \Sigma_i(S_i) \cap \Sigma(S_j) \Rightarrow$ i bordi $\Sigma(S_i)$ e $\Sigma(S_j)$ sono percorsi in versi opposti nel punto x (ricorda che se $(S, \hat{U})$ è una sup. poligonale orientata $\Rightarrow$ è definito il verso del bordo coerente con $\hat{U}$)

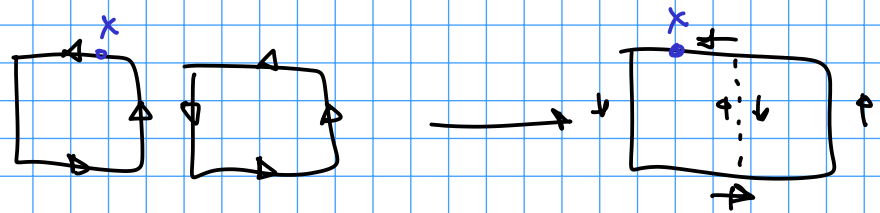


(e normale puntata fuori dal foglio, verso l'osservatore)

Se S è orientabile risultano definiti

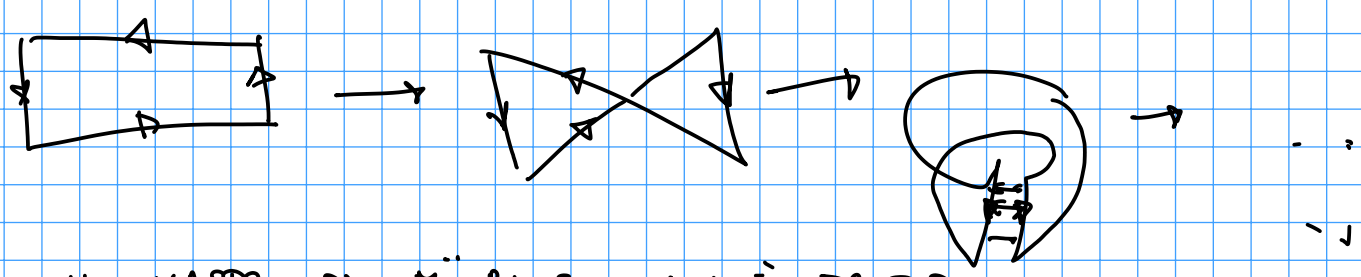
- $\hat{U}(x)$ per ogni x fuori da $\cup \Sigma(S_i)$
- un verso di percorrenza di $\Sigma(S)$

- $\hat{U}(x) = \hat{U}_i(x)$ se $x \in S_i \setminus \Sigma(S_i)$
- per ogni $x \in \Sigma(S) \Rightarrow x \in \Sigma(S_i)$ per un certo $i \Rightarrow$ scelgo il verso di $\Sigma(S)$ in x come il verso di $\Sigma(S_i)$ in x



CHIAMO SUPERFICIE (regolare e bella) ORIENTATA UNA COPPIA $(S, \hat{U})$ dove S è orientabile e $\hat{U}$ è concorde con $\hat{U}_i$ in ogni punto x regolare, dove $\hat{U}_i$ è ottenuta da una decomposizione di S in $(S_i, \hat{U}_i)$

OSS. NON TUTTE LE SUPERFICI SONO ORIENTABILI



IL NASTRO DI MÖBIUS NON È ORIENTABILE

DEF Se $(S, \hat{\nu})$ è una superficie orientabile (reg. a tratti) e $\vec{f}$ è un campo continuo su S $\Rightarrow$ definisco il flusso di $\vec{f}$ attraverso $(S, \hat{\nu})$ ponendo

$$\iint_S \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma \underset{(\text{def})}{=} \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} \vec{f} \cdot \hat{\nu}_i \, d\sigma$$

dove $(S_i, \hat{\nu}_i)$ è una decomposizione come sopra.

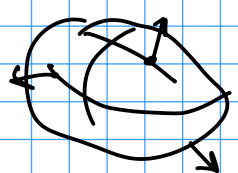
SI DIMOSTRA CHE IL FLUSSO NON DIPENDE DA COME DECOMPONGO.

PROP Se $D \subset \mathbb{R}^3$ è un dominio regolare (di $\mathbb{R}^3$) cioè $D = \{(x,y,z) : G(x,y,z) < 0\}$ con G di classe C^1 tale che $\nabla G \neq \vec{0}$ su $G = 0$

$\Rightarrow$ $S = \partial D$ è una superficie regolare orientabile $\{P : G(P) = 0\}$ con $\Sigma(S) = \phi$

INOLTRE POSSO CONSIDERARE L'ORIENTAZIONE "CANONICA"

$$\hat{\nu} = \frac{\nabla G(P)}{\|\nabla G(P)\|} \qquad (\hat{\nu} = \text{versore normale uscente da } D)$$



VALE LO STESSO SE D è un dominio regolare a tratti

IN QUESTO CASO $\hat{\nu}$ è definita in tutti i punti eccetto un insieme singolare

$$D = \{ G_1 < 0, G_2 < 0, \dots G_k < 0 \} \quad \text{a tratti}$$

$$\Sigma^{\infty}(S) = \{ \text{punti in cui più di un vincolo realizza "="} \}$$

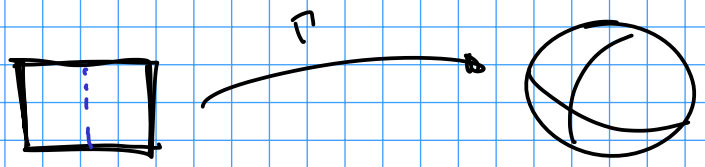
Se S è la frontiera di "un pieno" $D \Rightarrow S$ è orientabile e si può scegliere la normale uscente da D, ($\Sigma(S) = \emptyset$)

OSS. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è regolare e $\Gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e tale che

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \frac{\partial \Gamma}{\partial v} \neq 0 \quad \text{in } \Omega$$

Γ è iniettiva in Ω (ma non in $\overline{\Omega}$)

Si può dim. che $\Gamma(\overline{\Omega}) =: S$ è una superficie regolare e



Γ = coordinate polari

posso calcolare il flusso di $\vec{f}$ (o l'integrale di f scalare) usando Γ

$$\iint_{\Omega} f(\Gamma) \| \vec{N} \| du\,dv \qquad \Big/ \qquad \iint_{\Omega} \vec{f}(\Gamma) \cdot \vec{N}\, du\,dv$$

i punti di $\partial\Omega$ sono trascurabili e non influenzano gli integrali.

ESEMPIO $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ $\qquad \vec{f} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

S è orientabile, posso scegliere $\hat{\nu}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Per calcolare il flusso $\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$ poniamo spezzare S in due emisferi $S = S^+ \cup S^-$ e calcolare $\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma + \iint_{S^-} \dots$

Vediamo il primo integrale

$$\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \circledast \qquad S^+ = \text{grafico di } g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

su $B = \{x^2+y^2 \le 1\}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \dots$$

$$\vec{N}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right)$$

$$\circledast = \iint_B \left(\frac{x}{x^2+y^2+\underbrace{(1-x^2-y^2)}_{g(x,y)^2}}, \frac{y}{x^2+y^2+\underbrace{(1-x^2-y^2)}_{g(x,y)^2}}, \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2+(\quad)}\right)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{\ }}, \frac{y}{\sqrt{\ }}, 1\right)$$

$$= \iint_B \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right) dx\,dy =$$

$$\iint_B \left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2}\right) dx\,dy =$$

$$\iint_B \frac{x^2+y^2+1-x^2-y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \iint_B \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \text{(coord polari)}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{ds}{\sqrt{1-s}} \qquad (s=\rho^2) =$$

$$\pi\left[(-2)(1-s)^{1/2}\right]_0^1 = 2\pi$$

DUNQUE $\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 2\pi$

Per simmetria anche $\iint_{S^-} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 2\pi \Rightarrow \iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 4\pi$

SI POTEVANO USARE LE COORDINATE SFERICHE

(VEDI OSSERVAZIONE DI PRIMA - S NON È PARAMETRICA)

$x = \cos\theta \sin\varphi$

$y = \sin\theta \sin\varphi$ $\qquad \vec{f}$ DIVENTA

$z = \cos\varphi$ $\qquad (\cos\theta \sin\varphi,\ \sin\theta \sin\varphi,\ \cos\varphi)$

PRODOTTO SCALARE $= 1$

$\vec{N}(\theta,\varphi) = \sin\varphi\,(\cos\theta \sin\varphi,\ \sin\theta \sin\varphi,\ \cos\varphi)$

(VEDI LEZIONI PRECEDENTI)

$$\iint_S \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi\ \sin\varphi =$$

$$2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = 4\pi$$

LA PROSSIMA VOLTA:

$$\iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

D dominio regolare di $\mathbb{R}^3$

∂D è UNA SUPERFICIE ORIENTABILE

$\hat{\nu}$ normale uscente in punti di ∂D

$\vec{f}$ di classe C^1